== 行列式 ==

○　はじめに
・ 行列式は「連立方程式」「逆行列」「固有値」などに関連していろいろな場面で登場する．

・ 行列式は正方行列に対応して定まり，正方行列でない行列に対して行列式は定義されない．また，行列式は単なる数（スカラー）で，ベクトルや行列のように多くの成分からなるものではない．

　この頁では行列式の数学的な定義に深入りせず，「行列式の値を求めること」と「簡単な変形ができること」までを目標とする．

・ 実数値で与えられた行列の行列式の値を求めるだけなら，○1だけでよい．
・ 線形代数の基本として筆算で変形するときは○3，○5が必要になることがある．
・ 統計などの応用でしばしば登場するのは○4

○1 【行列式の値をExcelで求めるには】

各成分が整数，小数，分数の数値の場合はExcelで計算できる．
文字式を含む場合はExcelでは無理（π，e などの記号定数や根号を含む場合は近似値になる）

　Excelのワークシートに表1のように4×4の正方行列の各成分を入力してあるとき，E4のセルにこの行列の行列式の値を書き込むには，行列式を計算する関数MDETERM(行列の範囲)を利用するとよい．
(1) 式を直接書き込むときは求めたいセル（E4とする）に=MDETERM(A1:D4) と書き込むとよい．
(2) 関数名を覚えずに関数の挿入からメニューをたどっていくときは，
　画面上の数式バーの左にあるfx をクリック
→関数の分類：「数学/三角」または「すべて表示」
　関数名：MDETERM　OK
→配列：A1:D4　OK

表1

	A	B	C	D	E
1	1	−2	3	2	
2	−2	2	0	2	
3	2	4	−1	−2	
4	3	5	−7	−6	

この行列の行列式は −102 になる．

○1の2 【行列式の値をwxMaximaで求めるには】

wxMaximaでは文字式やπ，e などの記号定数，根号を含む場合も計算できる

※フリーの数学ソフトwxmaximaのインストール方法や初歩的な操作はこの頁

(1) はじめに行列に名前を付けて，（正方）行列の成分を手入力で行う
　ここでは $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ を例にとって解説する．
　wxMaximaのメニュー画面から，「代数」→「手入力による行列生成」と進み
　　行数：2
　　列数：2
　　タイプ：一般
　　変数名：A
　OKとする．

　成分を 1 2 3 4 と入力する（タブキーが使える）OK

(2) 上で入力した行列に対して行列式の値を求める
　入力したばかりの入力行　(%i...)の行　にカーソルを置いて
　「代数」→「行列式の計算」を選択すると −2 が出力される

（Excel練習用）問題
　次の行列の行列式の値を求めよ．（各々画面上でドラッグ・コピーしてからExcelに貼り付けて，計算を行うとよい．）

(1)

3	1
4	2

(2)

1	0
3	−2

(3)

0	−1	−1
3	2	1
5	−2	0

(4)

0	1	3
−2	−3	−5
4	−4	4

(5)

1	−2	3	2
0	2	0	2
0	0	−1	−2
0	0	0	−6

（解答）
(1) 2　(2) −2　(3) 11

(4) 48　(5)　12

（wxMaxima練習用）問題
　次の行列の行列式の値を求めよ．

(1)
$A=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}&\frac{\pi}{3}\\\frac{\pi}{3}&\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ とおくとき，$det(A)$ を求めるには

（解答）
行数：2，列数：2，タイプ：一般，変数名：Aの行列とし，成分を
　%pi/2　%pi/3
　%pi/3　%pi/4
のように入力する．

次に，その入力行にカーソルを当てて，「代数」→「行列式の計算」を選択する

結果：$\frac{\pi^2}{72}$ になります．

(2)
$B=\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}&\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\\frac{1-\sqrt{3}}{2}&\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ とおくとき，$det(B)$ を求めるには

※wxMaximaで記号定数 π は %pi，eは %e，根号 $\sqrt{2}$ はsqrt(2)などと入力します．出力されるときは各々 π，e，$\sqrt{2}$ になります．

（解答）

行数：2，列数：2，タイプ：一般，変数名：Bの行列とし，成分を
(−1−sqrt(3))/2　(−1+sqrt(3))/2
(1−sqrt(3))/2　(1+sqrt(3))/2
のように入力する．

次に，その入力行にカーソルを当てて，「代数」→「行列式の計算」を選択する

結果：一旦，少々複雑な式が出力される．
出力された式にカーソルを当てて，「式の変形」→「関数の整理」を選ぶと
$-\sqrt{3}$ になります．

○2 【行列式を表す記号】

行列 A の行列式を表す記号として $det(A)$，$|A|$ などが用いられる．この頁では主に $det(A)$ を用いる．

（※　行列式を英語で *determinant* という．参考までに，数学記号として行列式の書き方は上のように決まっているが $det(A)$ を「何と読むか」は決まっていない．*determinant A* と読む人が多いかも．）

例

$A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$ のとき $det(A)=2$

直接 $\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix}^2=4$ などと書くこともできる．

行列式を $|A|$ で表すときに，この記号は絶対値とは関係がなく，負の値にもなることに注意：上の問題(2)では $|A|=-2$

行列式は単なる数なので，和差積商などの演算の中に使うこともできる．

例

$det(A)det(B)=6$，$x=\dfrac{det\begin{pmatrix}0&2\\1&4\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}$ など

○3 【行列式の性質 I】 ･･･余因子展開による計算

（はじめに述べたように，この頁では行列式の数学的な定義に深入りしないが，行列式の性質の簡単な部分のみ触れる．）

(1)　1次正方行列（1×1行列）の行列式はその数とする．

(2)　2次正方行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の行列式は，$ad-bc$ とする．

(3)　3次正方行列 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ の行列式は，次のように2次正方行列の行列式で定義できる．

$a_{11}\cdot det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}-a_{21}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+a_{31}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$

※3次正方行列だけに適用できるサリュの方法もあるが，他の行列には適用できないので，ここではふれない．

(4)　以下同様にしてn次正方行列の行列式は（n−1）次正方行列の行列式に展開したものによって帰納的に定義する．･･･（前のものによって次のものを定義する．）

例

(1)

$det(\,3\,)=3$

(2)

$det\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=2\cdot 4-1\cdot 3=5$

(3)

$det\begin{pmatrix}3&4&-1\\2&5&-2\\1&6&-4\end{pmatrix}=3\,det\begin{pmatrix}5&-2\\6&-4\end{pmatrix}-2\,det\begin{pmatrix}4&-1\\6&-4\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}4&-1\\5&-2\end{pmatrix}$

$=3(-20+12)-2(-16+6)+(-8+5)=-24+20-3=-7$

(2) 2次正方行列の行列式

$a\,det(\,d\,)-c\,det(\,b\,)\quad =ad-bc$

(3)　3次正方行列の行列式

○　各 (i,j) 成分に対して，i 行と j 列を取り除いた残りの行列を考える．

○1　例えば a_{11} に対しては，次のように $a_{22}\sim a_{33}$ の2×2行列を考える．

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

次に，$a_{11}\cdot det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ を考えてその符号を正とする．

○2　a_{21} に対しては，次のように $a_{12}\sim a_{33}$ の2×2行列を考える．

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

次に，$a_{21}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ を考えてその符号を負とする．

○3　a_{31} に対しては，次のように $a_{12}\sim a_{23}$ の2×2行列を考える．

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

次に，$a_{31}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$ を考えてその符号を正とする．

これらの和を求めたものを第1列に関する「余因子展開」という．

$a_{11}\cdot det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}-a_{21}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+a_{31}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$

次の表のように $(1,1)$ 成分からスタートして各 (i,j) 成分に符号を付ける．･･･式では $(-1)^{i+j}$ と書かれるが，結果は「左上端が＋

※ 各成分 a_{ij} に対して

$(-1)^{i+j}a_{ij}$（その行と列を取り除いた行列の行列式）

を余因子という．
※ また，1つの列または1つの行についてすべての余因子を加えたもの，例えば

$$a_{11}\cdot det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\cdot det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\cdot det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

を余因子展開という．
（ここでは第1列に関する余因子展開を示したが，「どの列について」もしくは「どの行について」余因子展開しても行列式の値は等しくなり，ただ1通りに定まる．）
たとえば，第1行に関する余因子展開は次のようになる．

$$det\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} = 3\ det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - 4\ det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$=3(-20+12)-4(-8+2)-(12-5)=-24+24-7=-7$$

のチェック模様」になる．
水色で示したのは第1列に関して余因子展開するときに使う符号

符号表

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

例 次の行列の行列式を余因子展開によって求めよ．

(1)

1	0	2
3	0	1
2	1	1

(2)

2	0	0	0
1	2	1	−2
−3	−1	1	2
1	0	0	−1

（解答）
(1) 第2列は0が多いので，第2列で展開すると楽にできる．
$-0+0-(1\cdot 1-3\cdot 2)=5$

(2) 第1行は0が多いので，第1行で展開すると楽にできる．

$$2\ det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

次に第3行は0が多いので，第3行で展開すると楽にできる．
$2(\ 0-0+(-1)(2+1)\ )=-6$

例

(1) 上三角行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$，下三角行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，対角行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$ の行列式はいずれも対角成分の積になることを示せ．

(2) 単位行列の行列式は1になる（$det(E)=1$）ことを示せ．

（解答）
(1) 上三角行列について
第1列について展開すると a_{11}（残りの3×3行列の行列式）
さらに，第1列にについて展開すると $a_{11}a_{22}$（残りの2×2行列の行列式）
…
以下同様にして，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ になる．

下三角行列，対角行列についても同様にして示される．

(2) (1)の対角行列の行列式において，対角成分がすべて1のときを考えると分かる．

○4 【行列式の性質 II】…［後の応用でしばしば登場する!!］

(a) ある行列とその転置行列の行列式は等しい．
$det({}^tA)=det(A)$
(b) 行列の積の行列式は行列式の積に等しい．
$det(AB)=det(A)\ det(B)$

(a) ある行列の第 i 行について余因子展開した式は，転置行列の第 i 列について余因子展開した式と同じ式になるから，それらは等しい．

(b) 証明略
この性質から，次の等式が成り立つ．
$det(ABC)=det(A)\ det(B)\ det(C)$
A の逆行列 A^{-1} について
$AA^{-1}=E \ \rightarrow\ det(AA^{-1})=det(E)$
$\rightarrow\ det(A)\ det(A^{-1})=1 \ \rightarrow\ det(A^{-1})=\dfrac{1}{det(A)}$

○5 【行列式の性質 III】…筆算で変形するときに使う

(1) 行列の1つの行（または1つの列）を定数 k 倍すると行列式は k 倍になる．

(1) k倍した行について余因子展開すると分かる．

$$det\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = ka\ det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - kb\ det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + kc\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = k\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

※この性質から,「1つの行（または列）の係数を0以外の数でくくって行列式の外に出せる」ことになる.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

(2) 2つの行（または列）を入れ替えると行列式の符号が変わる.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$$

(3) 行列の1つの行（かたは1つの列）の定数k倍を他の行（または列）に加えても行列式は変わらない.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d+ka & e+kb & f+kc \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= k\left\{a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}\right\}$$

$$k\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = k\left\{a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}\right\}$$

(2)(3)この頁では証明略
(1)(2)(3)を組み合わせて、行列式を扱いやすい形に変形していくことができる.
例

1	3	−1	2
1	2	1	−2
−3	−1	1	2
2	4	−1	1

の行列式を求めたいとき
第2行：第2行−第1行
第3行：第3行+第1行×3
第4行：第4行−第1行×2　により第1列に0を作ると簡単になる

1	3	−1	2
0	−1	2	−4
0	8	−2	8
0	−2	1	−3

次の3×3行列について

−1	2	−4
8	−2	8
−2	1	−3

第2行：第2行+第1行×8
第3行：第3行−第1行×2　により第1列に0を作ると簡単になる

−1	2	−4
0	14	−24
0	−3	5

以上により，$1*(-1)*(70-72)=2$