== 行列式 ==

【はじめに】

○　行列は，その要素の個数だけの独立した要素から成りたっており，次のように［　］や(　)で囲んで表します．

2行2列の正方行列の例

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

3行4列の行列の例

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

○　行列式の値は，次のように｜　｜や $det(\ )$ で囲んで表します．（英語で行列式を表す用語：determinantの略）

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

○　行列式は1つの数で，正方行列に対してだけ定義され，正方行列でないときは行列式を考えません．

【行列式の求め方】

○　行列式の値を次のように定める理由については省略して，ここでは結論だけをまとめておきます．

1. はじめに，1行1列成分を正として，交互に符号を変えて，次の青で示した要素は正，赤で示した要素は負の符号をもつと決めます．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

2. n次正方行列の行列式は，n−1次正方行列の行列式を使って順次定義します．
このとき，「1つの行（または1つの列）に沿って展開する」という考え方をします．

次の例は，1列に沿って展開したもので，
i)　$+a$ に対しては，その行とその列を取り除いた残りの行列から成る行列式を掛けます．
ii) 上に述べたように，d には負の符号を付けて，$-d$ に対しては，その行とその列を取り除いた残りの行列から成る行列式を掛けます．
ii) 上に述べたように，g には正の符号を付けて，$+g$ に対しては，その行とその列を取り除いた残りの行列から成る行列式を掛けます．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

2次正方行列の行列式は，さらに次数の低い1次正方行列の行列式で定義しますが，1次正方行列の行列式は「その要素となっている数」とします．
例えば

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = e|\,i\,| - h|\,f\,|$$

ここでは｜｜は絶対値記号ではなく，行列式を表す．
したがって，

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = e|\,i\,| - h|\,f\,| = ei - hf$$

同様にして，

$$\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} = b|\,i\,| - h|\,c\,| = bi - hc$$

同様にして，

○この頁に登場する【問題】は，公益社団法人日本技術士会のホームページに掲載されている「技術士第一次試験過去問題 共通科目A 数学」の引用です．（=公表された著作物の引用）

○【解説】は個人の試案ですが，Web教材化にあたって「問題の転記ミス」「考え方の間違い」「プログラムの作動ミス」などが含まれる場合があり得ます．
　問題や解説についての質問等は，原著作者を煩わせることなく，当Web教材の作成者（<浅尾>mwm48961@uniteddigital.com）に対して行ってください．

【例】 次の行列式の値を求めてください．

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

□　例えば，1列目（縦）に沿って展開すると決める．
□　2には正の符号を，3には負の符号を付ける．

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times4 - 3\times5 = 8 - 15 = -7$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

□　0 が多く含まれる行や列に沿って展開すると計算が楽になります．ここでは，1列目に沿って展開します．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 24 - 0 = 24$$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

□　0 が多く含まれる行や列に沿って展開すると計算が楽になります．ここでは，1列目に沿って展開します．
□　4次の行列式←3次の行列式←2次の行列式のように次数を下げて計算します．

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 0 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix})$$

$$-(\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0)$$

$$= 2\{3\times6 + 2(-8-2)\} - \{(-8-2) - 3\times(-4)\}$$

$$= 2\{18 - 20\} - \{-10 + 2\} = -4 - 2 = -6$$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

□　0 が多く含まれる行や列に沿って展開すると計算が楽になります．ここでは，1行目に沿って展開します．
□　4次の行列式←3次の行列式←2次の行列式のように

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = b|f| - e|c| = bf - ec$$

上記の3行3列の行列式は，結局次のようになります．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$= a(ei-hf) - d(bi-hc) + g(bf-ec)$$

※2次の行列式の値だけは，高校でも習うので覚えておくのが普通です

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

次数を下げて計算します．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

さらに，1行目に沿って展開するのが有利

$$= -(2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0) = -2(4-6) = 4$$

※正しい 番号 をクリックしてください．

平成16年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ の値は，次のどれか．

1 0　2 1　3 2　4 3　5 4

○ HELP

0 が多く含まれる1列目に沿って展開する

$$0 - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

さらに，0 が多く含まれる1列目に沿って展開する

$$= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-0) = 2 \rightarrow \boxed{3}$$

平成17年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-15

方程式 $\begin{vmatrix} x & 0 & -6 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ の実数解は，次のどれか．

1 1　2 2　3 3　4 4　5 5

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$x\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= x(x(x-3)+2) + (0-6)$$

$$= x(x^2-3x+2) - 6$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$$

この3次方程式を因数分解によって解く

$$x^2(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$(x^2+2)(x-3) = 0$$

実数解は

$$x = 3 \rightarrow \boxed{3}$$

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

方程式 $\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1-t & 0 & t \end{vmatrix} = 0$ を満たす t の値は，次のどれか．

1 -2　2 -1　3 0　4 1　5 2

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$t\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & t \end{vmatrix} - 0 + (1-t)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= t(t-0) + (1-t)(3+1)$$

$$= t^2 - 4t + 4 = 0$$

この2次方程式を因数分解によって解く

$$(t-2)^2 = 0$$

$$t = 2 \rightarrow \boxed{5}$$

平成20年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-17

行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ の値は，次のどれか．

1 -24　2 -12　3 0　4 12　5 24

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$0 - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

さらに，1列目に沿って展開する

$$= -4(3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0)$$

$$= -12(2-0)$$

$$= -24 \rightarrow \boxed{1}$$

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

3字行列式により定義される方程式

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 2 & x-4 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=0$$ の解は，次のどれか．

1 $-5, 0, 3$　2 $-3, 0, 3$　3 $0, 3, 5$　4 $1, 3, 5$
5 $2, 3, 5$

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$(x-2)\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x-4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$=(x-2)(x^2-6x+8-2)-2(x-2-1)+(2-(x-4))$$
$$=(x-2)(x^2-6x+6)-2(x-3)+(-x+6))$$
$$=x^3-8x^2+18x-12-2x+6-x+6$$
$$=x^3-8x^2+15x=0$$

因数分解によって解く

$$x(x^2-8x+15)=0$$
$$x(x-3)(x-5)=0$$
$$x=0, 3, 5 \rightarrow \boxed{3}$$

平成22年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-17

行列式により与えられる式 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$ は，次のどの直線を表すか．

1 $x-y+1=0$　2 $x+y+1=0$　3 $x-y-1=0$

4 $x+y-1=0$　5 $x+y=0$

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$x\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} y & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} y & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$x(2+2)-(y+2)-3(y-2)=0$$
$$4x-y-2-3y+6=0$$
$$4x-4y+4=0$$
$$x-y+1=0 \rightarrow \boxed{1}$$

平成23年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-17

行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ の値は，次のどれか．

1 20　2 21　3 22　4 23　5 24

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}+0-0$$

各々の3次行例式を1行目に沿って展開する

$$=2(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-0+0)-(0-0+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix})$$
$$=2(12-0)-(1-0)$$
$$=24-1=23 \rightarrow \boxed{4}$$

平成24年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-17

行列式により与えられる方程式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 4 & 0 \end{vmatrix}=0$ の自然数の解は，次のどれか．

1 1　2 2　3 3　4 4　5 5

○ HELP

1列目に沿って展開する

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 4 & 0 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 4 & 0 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 4 & 0 \end{vmatrix}+0-0=0$$

各々の3次行例式を1行目に沿って展開する

$$3(0-0+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 4 \end{vmatrix})-x(0-0+x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 4 \end{vmatrix})=0$$

$$3(4-x)-x(x(4-x))=0$$
$$12-3x-4x^2+x^3=0$$
$$x^3-4x^2-3x+12=0$$

この3次方程式を因数分解によって解く

$$x^2(x-4)-3(x-4)=0$$
$$(x-4)(x^2-3)=0$$
$$x=4, \pm$$

自然数解は

$$x=4 \rightarrow \boxed{4}$$