== 定数係数の2階線形微分方程式 ==(非同次)

■非同次方程式とは

○ 次の式

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

を「2階線形同次微分方程式」というのに対して,

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$$

を「2階線形非同次微分方程式」といいます.

○ 定数係数の2階線形微分方程式については,同次方程式は次の(1)の形,非同次方程式は(2)の形になります.(a, b は定数の係数)

$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$

$$y''+ay'+by=R(x) \cdots(2)$$

⇒ y'', y', y 以外に関数 $R(x)$ が付いているのが「非同次形」

○ 微分方程式を満たす1つの解を特殊解(特別解)という. …これはたまたま見つかった1つの解でよい.
非同次方程式(2)の一般解について,次の定理が成り立ちます.

【定理】
　非同次方程式

$$y''+ay'+by=R(x) \cdots(2)$$

の特殊解に,
　同次方程式

$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$

の一般解を加えると,非同次方程式(2)の一般解が得られます.

(解説)
(2)式の特殊解を y_0 ,(1)の一般解を y_1 とおくと,

$$y_0''+ay_0'+by_0=R(x)$$

$$y_1''+ay_1'+by_1=0$$

したがって, $y=y_0+y_1$ とおくと,

$$\begin{aligned}&y''+ay'+by\\&=(y_0+y_1)''+a(y_0+y_1)'+b(y_0+y_1)\\&=(y_0''+ay_0'+by_0)+(y_1''+ay_1'+by_1)\\&=R(x)\end{aligned}$$

が成り立ち,(1)の一般解 y_1 は任意定数を2つ含んでいるから,この y は(2)の一般解になります.

※ (1)の一般解が右の(まとめ)のように求まるので,非同次方程式(2)の特殊解を(偶然でもよいからとにかく1つ)見つけると,それらの和により非同次方程式(2)の一般解が得られることになります.

【例1】
　$y''-3y'+2y=1$ の一般解を求めるには
まず,同次方程式 $y''-3y'+2y=0$ の一般解を求めると
　$r^2-3r+2=0$ の解は $r=1, 2$ だから
　右のまとめ1.により
　$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$
次に,非同次方程式 $y''-3y'+2y=1$ の特殊解を求めると(どのように求めるかは後述)

$$y=\frac{1}{2}$$

これらの和を作ると,元の方程式の一般解は

$$y=\frac{1}{2}+C_1e^x+C_2e^{2x}$$

(前頁のまとめ)
【定数係数の2階線形同次形微分方程式の一般解】
　a, b を定数とするとき,微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \cdots(1)$$

の一般解は,2次方程式

$$r^2+ar+b=0 \cdots(*)$$

の解によって表すことができ,

1. (*)が異なる2つの実数解 p, q をもつとき
　$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$
2. (*)が異なる2つの虚数解 $h\pm ki$ をもつとき
　$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$
3. (*)が重解 p をもつとき
　$y=e^{px}(C_1+C_2x)$

となる.

【例2】
　$y''-4y'+4y=x$ の一般解を求めるには
まず,同次方程式 $y''-4y'+4y=0$ の一般解を求めると
　$r^2-4r+4=0$ の解は $r=2$ (重解)だから
　上のまとめ3.により
　$y=e^{2x}(C_1+C_2x)$
次に,非同次方程式 $y''-4y'+4y=x$ の特殊解を求める(どのように求めるかは後述)

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

これらの和を作ると,元の方程式の一般解は

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+e^{2x}(C_1+C_2x)$$

■非同次方程式の特殊解の求め方

上記のように，2階線形非同次微分方程式の一般解を求めるためには，1つの特殊解を求めればよい．

この特殊解（1つの解）を「一発で求めよう」とすると，少し複雑なことを覚えなければならない．ここでは，もう少し気楽に考えて，

1回か2回なら失敗してもよい

と考える（試行錯誤を受け入れる）ことにより，

覚えることを減らす作戦とします．

【要点】

(1)

ある関数 y，その導関数 y' 及び第2次導関数 y'' の定数倍を加えたものは，元の関数 y の形を反映している．

したがって，$y''+ay'+by$ が $R(x)$ に等しくなるのは，関数 y 自身が $R(x)$ の形と深い関係があるときです．

○ y が多項式 ⇒ y', y'' も多項式

⇒ $y''+ay'+by$ は多項式

○ $y=e^{kx}$ ⇒ $y'=..e^{kx}, y''=..e^{kx}$

⇒ $y''+ay'+by=...e^{kx}$

○ $y=\sin kx$ ⇒ $y'=..\cos kx, y''=..\sin kx$

⇒ $y''+ay'+by=...\sin kx+...\cos kx$

(2)…ここが試行錯誤ありの求め方…運が悪くても，2回の失敗で解答にたどり着けます

1）　多項式，指数関数，三角関数，...

で試してみて未定係数が定まればそれを解答とする．

2）上記の係数 a, b 及び k の組合せにより未定係数が定まらないときは，

x ×多項式，x ×指数関数，x ×三角関数，...

を試してみます．

3）それでもダメなときは，

x^2 ×多項式，x^2 ×指数関数，x^2 ×三角関数，...

を試してみます．

※　限りなく続くわけではなく，3)までで解けます．

【例－右辺が多項式のもの1】

$y''+y'+2y=3$ の1つの特殊解を求めてください．

（解答）

右辺 $R(x)=3$ の形に合わせて

$y=A$

の形で試してみる（未定係数 A を求めることが，ここでの目標）

$y'=0$

$y''=0$

となるから

$y''+y'+2y=0+0+2A=2A$

これが 3 に等しくなるには

$2A=3$

$A=\frac{3}{2}$

ゆえに

$y=\frac{3}{2}$ …（答）

（検算）

$y=\frac{3}{2}$ のとき

$y'=y''=0$ だから

$y''+y'+2y=0+0+2\times\frac{3}{2}=3$

が成り立ちます．

【例－右辺が多項式のもの2】

$y''+3y'=2$ の1つの特殊解を求めてください．

$y''+ay'+by=c\ (\neq 0)$（a, b, c は与えられた係数）において，$b=0$ のときは，$y=A$（A は未定係数）とおいたとしても，$y'=y''=0$ により

左辺 $y''+ay'+by=0+0+bA=bA$ は $c\ (\neq 0)$ に等しくなることはできません．

（$A=\frac{c}{b}$ とはできない）

【例－右辺が多項式のもの3】

$y''+4y'-5y=6x$

の1つの特殊解を求めてください．

○　右辺が1次式のときは，一般の1次式 $y=Ax+B$ を試します．

○　右辺が2次式のときは，一般の2次式 $y=Ax^2+Bx+C$ を試します．

○　3次以上のときも同様です．

（解答）

$y=Ax+B$ とおくと

$y'=A$

$y''=0$

となるから

$y''+4y'-5y$

$=0+4A-5(Ax+B)$

$=(-5A)x+(4A-5B)$

これが，右辺の $6x$ に等しくなるには

$$\begin{cases} -5A=6 & \cdots(1) \\ 4A-5B=0 & \cdots(2) \end{cases}$$

$A=-\frac{6}{5}$

$B=-\frac{24}{25}$

ゆえに

$y=-\frac{6}{5}x-\frac{24}{25}$ …（答）

【例－右辺が多項式のもの4】

$y''-3y'+y=2x^2$

の1つの特殊解を求めてください．

（解答）

$y=Ax^2+Bx+C$ とおくと

$y'=2Ax+B$

$y''=2A$

となるから

$y''-3y'+y$

$=2A-3(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C)$

$=Ax^2+(-6A+B)x+(2A-3B+C)$

これが，右辺の $2x^2$ に等しくなるには

$$\begin{cases} A=2 & \cdots(1) \\ -6A+B=0 & \cdots(2) \\ 2A-3B+C=0 & \cdots(3) \end{cases}$$

$A=2, B=12, C=32$

ゆえに

この場合は，$y=Ax$ を試します．

（解答）

（試してみてダメな部分）
右辺 $R(x)=2$ の形に合わせて
$$y=A$$
の形で試してみると，
$$y'=0$$
$$y''=0$$
となるから
$y''+3y'=0+0$ となって，どんな定数 A を持ってきても $c\ (\neq 0)$ に等しくなることはできません．

$y=Ax$ とおくと
$$y'=A$$
$$y''=0$$
となるから
$$y''+3y'=0+3A=3A$$
これが，右辺の 2 に等しくなるには
$$3A=2$$
$$A=\frac{2}{3}$$
ゆえに
$$y=\frac{2}{3}x \quad \cdots(答)$$

（検算）
$y=\frac{2}{3}x$ のとき
$y'=\frac{2}{3}$，$y''=0$ だから
$y''+3y'=0+3\times\frac{2}{3}=2$
が成り立ちます．

右に続く→

$$y=2x^2+12x+32 \quad \cdots(答)$$

【例－右辺が多項式のもの5】
$y''-2y'=3x-4$
の1つの特殊解を求めてください．

$y=Ax+B$ とおくと，係数 A，B が定まりませんので，$y=x(Ax+B)$ で試します．

（解答）
$y=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$ とおくと
$$y'=2Ax+B$$
$$y''=2A$$
となるから
$$y''-2y'$$
$$=2A-2(2Ax+B)$$
$$=(-4A)x+(2A-2B)$$
これが，右辺の $3x-4$ に等しくなるには
$$\begin{cases} -4A=3 & \cdots(1) \\ 2A-2B=-4 & \cdots(2) \end{cases}$$
$$A=-\frac{3}{4},\ B=\frac{5}{4}$$
ゆえに
$$y=x\left(-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}\right) \quad \cdots(答)$$

○　$y=e^{kx}$ を微分すると y' や y'' に e^{kx} が登場しますので，$R(x)=..e^{kx}$ のときは，$y=Ae^{kx}$ を試してみます

【例－右辺が指数関数のもの1】
$y''+2y'-3y=e^{2x}$
の1つの特殊解を求めてください．

（解答）
$y=Ae^{2x}$ とおくと
$$y'=2Ae^{2x}$$
$$y''=4Ae^{2x}$$
となるから
$$y''+2y'-3y$$
$$=4Ae^{2x}+4Ae^{2x}-3Ae^{2x}=5Ae^{2x}$$
これが，右辺の e^{2x} に等しくなるには
$$5A=1$$
$$A=\frac{1}{5}$$
ゆえに
$$y=\frac{1}{5}e^{2x} \quad \cdots(答)$$

【例－右辺が指数関数のもの2】
$y''-4y'-5y=e^{5x}$
の1つの特殊解を求めてください．

（解答）
$y''+ay'+by=c\ e^{dx}$（$a,b,c\neq 0,d\neq 0$ は与えられた定数）
において，$y=Ae^{dx}$ とおくと
$$y'=dAe^{dx}$$
$$y''=d^2Ae^{dx}$$
となるから
$$y''+ay'+by=A(d^2+ad+b)e^{dx}$$
となり，これが方程式の右辺の $c\ e^{dx}$ と等しくなるためには
$$A(d^2+ad+b)=c\ (\neq 0)$$
でなければなりませんが，
$d^2+ad+b=0$（← d が特性方程式の解であるとき）
のときは，係数 A が定まらないので，$y=Axe^{dx}$ を試します

○　$\sin kx$ や $\cos kx$ を微分すると $\cos kx$ と $\sin kx$ が交互に登場しますので，$R(x)=\sin kx$ だからといって，$y=A\sin kx$ だけで解決するとは限らず，$R(x)=\cos kx$ だからといって，$y=A\cos kx$ だけで解決するとは限りません．特に，$b\neq 0$ のとき，逆の側が登場します．
⇒ 三角関数が登場する場合には，$y=A\sin kx+B\cos kx$ を想定して係数を合わせます．

【例－右辺が三角関数のもの1】
$y''-3y'+2y=20\sin 2x$
の1つの特殊解を求めてください．

（解答）
$y=A\sin 2x+B\cos 2x$ とおくと
$$y'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$$
$$y''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$$
となるから
$$y''-3y'+2y$$
$$=(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)-3(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$$
$$+2(A\sin 2x+B\cos 2x)$$
$$=(-2A+6B)\sin 2x+(-6A-2B)\cos 2x$$

(*) 一般に，p,q,r,s が未定係数であるとき，次のように係数比較できます．
$p\sin nx+q\cos nx=0$ が恒等式（1つの x に対してでなく，すべての x に対して成り立つとき）
$$\Leftrightarrow\ p=q=0$$
$p\sin nx+q\cos nx=r\sin nx+s\cos nx$ が恒等式
$$\Leftrightarrow\ p=r,\ q=s$$

これが，右辺の $20\sin 2x$ に等しくなるには
$$\begin{cases} -2A+6B=20 & \cdots(1) \\ -6A-2B=0 & \cdots(2) \end{cases}$$
$$A=-1,\ B=3$$
ゆえに
$$y=-\sin 2x+3\cos 2x \quad \cdots(答)$$

上記の(*)の証明
三角関数の合成公式により

$y=Axe^{5x}$ とおくと

$y'=A(e^{5x}+5xe^{5x})=Ae^{5x}(1+5x)$

$y''=A(5e^{5x}(1+5x)+e^{5x}(5))=Ae^{5x}(10+25x)$

となるから

$y''-4y'-5y$

$=Ae^{5x}(10+25x-4-20x-5x)=6Ae^{5x}$

これが，右辺の e^{5x} に等しくなるには

$6A=1$

$A=\frac{1}{6}$

ゆえに

$y=\frac{1}{6}x\ e^{5x}$ …(答)

$p\ \sin\ nx+q\ \cos\ nx=\sqrt{p^2+q^2}\ \sin(nx+\alpha)$

と書けるから，これがつねに 0 となるのは $p=q=0$ の場合に限る．

（別の証明）

$p\ \sin\ nx+q\ \cos\ nx=0$ がすべての x に対して成り立つならば，当然 $x=0,\ x=\frac{\pi}{2n}$ のときも成り立つはずだから

$x=0$ を代入すると $q=0$

$x=\frac{\pi}{2n}$ を代入すると $p=0$（以上は必要条件）

逆に，$p=q=0$ のとき $p\ \sin\ nx+q\ \cos\ nx=0$ が成り立つのは明らか．（十分条件も満たす）

（2番目の式）

$p\ \sin\ nx+q\ \cos\ nx=r\ \sin\ nx+s\ \cos\ nx$

⇔ $(p-r)\ \sin\ nx+(q-s)\ \cos\ nx=0$ だから，

上の結果により

$p\ \sin\ nx+q\ \cos\ nx=r\ \sin\ nx+s\ \cos\ nx$

⇔ $p=r,\ q=s$

【問題1】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$y''+2y'+3y=4$ ○ HELP 解答

$y=1$　$y=2$　$y=\frac{2}{3}$　$y=\frac{3}{2}$　$y=\frac{4}{3}$

（選択問題なので，順に代入してもわかりますが，ここでは「未知の関数を求める」という立場で解いてみる．以下の問題も同様）

$y=A$ とおくと

$y'=y''=0$

となるから

$y''+2y'+3y=0+0+3A=3A$

そこで

$3A=4$

を解きます

$y=\frac{4}{3}$ …(答)

【問題2】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$y''-2y'=1$ ○ HELP 解答

$y=1$　$y=-\frac{1}{2}$　$y=\frac{1}{2}$　$y=-\frac{x}{2}$　$y=\frac{x}{2}$

$y=A$ とおくと係数が定まらないので，$y=Ax$ とおきます．

このとき

$y'=A,\ y''=0$

となるから

$y''-2y'=0-2A$

そこで

$-2A=1$

を解きます

$y=-\frac{1}{2}x$ …(答)

【問題3】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$y''-2y'+y=e^{3x}$

○ HELP 解答

$y=\frac{1}{4}e^{3x}$　$y=\frac{1}{2}e^{3x}$

$y=e^{3x}$　$y=x\ e^{3x}$　$y=\frac{x}{2}e^{3x}$

$y=Ae^{3x}$ とおくと

$y'=3Ae^{3x},\ y''=9Ae^{3x}$

となるから

$y''-2y'+y$

$=(9A-6A+A)e^{3x}=4Ae^{3x}$

そこで

$4A=1$

を解きます

$y=\frac{1}{4}e^{3x}$ …(答)

【問題4】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$y''-4y'+4y=e^{2x}$

○ HELP 解答

$y=\frac{1}{2}e^{2x}$　$y=\frac{1}{2}xe^{2x}$　$y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

$y=\frac{1}{4}e^{2x}$　$y=\frac{1}{4}xe^{2x}$

この問題のように e^{nx} の $n=2$ が特性方程式 $d^2+ad+b=0$ の重解になっているときは，$y=Ae^{2x}$ でも $y=Axe^{2x}$ でも係数は定まらず，$y=Ax^2e^{2x}$ まで調べる必要があります．

$y=Ax^2e^{2x}$ とおくと

$y'=Ae^{2x}(2x+2x^2)$

$y''=Ae^{2x}(2+8x+4x^2)$

となるから

$y''-4y'+4y=2Ae^{2x}$

そこで

$2A=1$

を解きます

$y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$ …(答)

【問題5】

【問題6】

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$$y''+y=\sin\ 2x$$

○ HELP 解答

$y=\sin\ 2x$　$y=\frac{1}{2}\sin\ 2x$　$y=\frac{1}{3}\sin\ 2x$　$y=-\frac{1}{2}\sin\ 2x$　$y=-\frac{1}{3}\sin\ 2x$

$y=A\sin\ 2x+B\cos\ 2x$ とおくと

$$y'=2A\cos\ 2x-2B\sin\ 2x$$
$$y''=-4A\sin\ 2x-4B\cos\ 2x$$

となるから

$$y''+y=(-3A)\sin\ 2x+(-3B)\cos\ 2x$$

そこで

$$\begin{cases} -3A=1 & \cdots(1) \\ -3B=0 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解きます

$$A=-\frac{1}{3},\ B=0$$

となるから

$$y=-\frac{1}{3}\sin\ 2x\cdots(答)$$

※この問題のように y' の項がないときは，$R(x)$ と同じ方の１つの $y=A\sin\ nx$ だけで $y,\ y''$ を合わせることができます．

次の微分方程式の特殊解を求めてください．

$$y''-2y'+3y=\cos\ x$$

○ HELP 解答

$y=\frac{1}{3}\cos\ x$　$y=\frac{1}{2}\sin\ x$　$y=\frac{1}{4}\sin\ x+\frac{1}{4}\cos\ x$　$y=-\frac{1}{4}\sin\ x+\frac{1}{4}\cos\ x$　$y=-\frac{1}{4}\sin\ x-\frac{1}{4}\cos\ x$

$y=A\sin\ x+B\cos\ x$ とおくと

$$y'=A\cos\ x-B\sin\ x$$
$$y''=-A\sin\ x-B\cos\ x$$

となるから

$$y''-2y'+3y=(2A+2B)\sin\ x+(-2A+2B)\cos\ x$$

そこで

$$\begin{cases} 2A+2B=0 & \cdots(1) \\ -2A+2B=1 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解きます

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4}$$

となるから

$$y=-\frac{1}{4}\sin\ x+\frac{1}{4}\cos\ x\cdots(答)$$

○　非同次方程式において，右辺が幾つかの関数の和差及びそれらの定数倍になっているとき，元の非同次方程式の特殊解は，個別に求めた特別解の和差及びそれらの定数倍により求められます．

【重ね合わせの原理】

非同次方程式

$$y''+ay'+by=R_1(x)\cdots(1)$$

の解を y_1 とし，

非同次方程式

$$y''+ay'+by=R_2(x)\cdots(2)$$

の解を y_2 とするとき，

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

は，非同次方程式

$$y''+ay'+by=C_1R_1(x)+C_2R_2(x)\cdots(3)$$

の解となる．

例えば，

$$y''+ay'+by=4e^{3x}+5\cos\ 2x$$

の特殊解を求めたいとき

$$y''+ay'+by=e^{3x}$$

の特殊解 y_1 と

$$y''+ay'+by=\sin\ 2x$$

の特殊解 y_2 をそれぞれ求めておくと，

元の方程式の解は

$y=4y_1+5y_2$ で得られます．

※　これにより，別々に求めて定数倍の和差を作ればよい．

（証明）

$$y_1''+ay_1'+by_1=R_1(x)$$
$$y_2''+ay_2'+by_2=R_2(x)$$

のとき

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

とおくと

$$y''+ay'+by=(C_1y_1''+C_2y_2'')+a(C_1y_1'+C_2y_2')+b(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$=C_1(y_1''+ay_1'+by_1)+C_2(y_2''+ay_2'+by_2)$$
$$=C_1R_1(x)+C_2R_2(x)$$

が成り立ちます．

【例】

$$y''-4y'+8y=3x+5e^{2x}$$

の１つの特殊解を求めてください．

（解答）

(1) $y''-4y'+8y=x$ の特殊解 y_1 を求める．

$y_1=Ax+B$ とおくと

$$y_1'=A$$
$$y''=0$$

となるから

$$y_1''-4y_1'+8y_1=-4A+8(Ax+B)=(8A)x+(-4A+8B)$$

これが，x に等しくなるには

$$\begin{cases} 8A=1 \\ -4A+8B=0 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{8},\ B=\frac{1}{16}$$

したがって，

$$y_1=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}$$

(2) $y''-4y'+8y=e^{2x}$ の特殊解 y_2 を求める．

$y_2=Ae^{2x}$ とおくと

$$y_2'=2Ae^{2x}$$
$$y''=4Ae^{2x}$$

となるから

$$y_2''-4y_2'+8y_2=4Ae^{2x}$$

これが，e^{2x} に等しくなるには

$$4A=1$$

$$A=\frac{1}{4}$$

したがって，

$$y_2=\frac{1}{4}e^{2x}$$

(1)(2)より

$$3y_1+5y_2=\frac{3}{8}x+\frac{3}{16}+\frac{5}{4}e^{2x}\cdots(答)$$

【問題7】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$$y''-3y'+2y=4x-e^x\cos x$$
○ HELP 解答

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$

$y=2x+3+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

$y=2x-3+e^x(\sin x-\cos x)$

$y''-3y'+2y=x$ の特殊解を求めると
$$y_1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$
$y''-3y'+2y=e^x\cos x$ の特殊解は，右辺の形から
$Ae^x\sin x+Be^x\cos x$ の形で求めます．
$$y_2=-\frac{1}{2}e^x\sin x-\frac{1}{2}e^x\cos x$$
$4y_1-y_2=2x+3+\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$ …（答）

【問題8】
次の微分方程式の特殊解を求めてください．
$$y''+3y'-2y=x+4e^x-5\sin x$$
○ HELP 解答

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+2e^x+\frac{5}{6}(\sin x+\cos x)$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+2e^x+\frac{5}{6}(\sin x+\cos x)$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-2e^x+\frac{5}{6}(\sin x-\cos x)$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}-2e^x+\frac{5}{6}(\sin x-\cos x)$

$y''+3y'-2y=x$ の1つの特殊解は
$$y_1=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$
$y''+3y'-2y=e^x$ の1つの特殊解は
$$y_2=\frac{1}{2}e^x$$
$y''+3y'-2y=\sin x$ の1つの特殊解は
$$y_3=-\frac{1}{6}(\sin x+\cos x)$$
$y_1+4y_2-5y_3=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}+2e^x+\frac{5}{6}(\sin x+\cos x)$ …（答）

○ この頁の先頭部分で述べましたように，非同次方程式の特殊解と同次方程式の一般解がわかれば，非同次方程式の一般解が求められます．
○ 一般解が求まれば，与えられた初期条件を満たす特殊解も求められることになります．

【問題9】
次の微分方程式の一般解を求めてください．
$$y''-y'-2y=2+3e^x$$
○ HELP 解答

$y=2+3e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-2x}$

$y=-1-\frac{3}{2}e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

$y=-1-\frac{3}{2}e^{-x}+C_1e^x+C_2e^{-2x}$

$y=2+3e^{-x}+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

(1) 同次方程式 $y''-y'-2y=0$ の特性方程式
$$r^2-r-2=0$$
は，異なる2つの実数解 $r=2,\ -1$ を持つから、同次方程式
$$y''-y'-2y=0$$
の一般解は
$$C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$
(2) 非同次方程式
$$y''-y'-2y=1$$
の1つの特殊解は
$$y_1=-\frac{1}{2}$$
(3) 非同次方程式
$y''-y'-2y=e^x$ の1つの特殊解は
$$y_2=-\frac{1}{2}e^x$$
(1)(2)(3)より，元の方程式の一般解は
$$2y_1+3y_2+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$
$$=-1-\frac{3}{2}e^x+C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$ …（答）

【問題10】
次の微分方程式の解で，初期条件 $y(0)=y'(0)=0$ を満たすものを求めてください．
$$y''-y=\sin x+x$$
○ HELP 解答

$y=-\frac{1}{2}\sin x-x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$

$y=-\frac{1}{2}\sin x+x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$

$y=\frac{1}{2}\sin x-x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$

$y=\frac{1}{2}\sin x+x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$

(1) 同次方程式 $y''-y=0$ の特性方程式
$$r^2-1=0$$
は，異なる2つの実数解 $r=-1,\ 1$ を持つから、同次方程式
$$y''-y=0$$
の一般解は
$$C_1e^{-x}+C_2e^x$$
(2) 非同次方程式
$$y''-y=\sin x$$
の1つの特殊解は
$$y_1=-\frac{1}{2}\sin x$$
(3) 非同次方程式
$y''-y=x$ の1つの特殊解は
$$y_2=-x$$
(1)(2)(3)より，元の方程式の一般解は
$$-\frac{1}{2}\sin x-x+C_1e^{-x}+C_2e^x$$
初期条件を用いて，任意定数 C_1 ,C_2 の値を定めると
$C_1=-\frac{3}{4}$, $C_2=\frac{3}{4}$ となるから
$$y=-\frac{1}{2}\sin x-x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{3}{4}e^x$$ …（答）

※（参考）
wxMaximaでこの微分方程式の一般解を求めるには
ode2('diff(f(x),x,2)-f(x)=sin(x)+x, f(x),x);
と入力します．このとき得られる解は

$$f(x)=-\frac{\sin(x)+x}{2}+k1e^{-x}+k2e^{x}$$

初期条件を入れて解を求めるには

*ic2(y=-1/2*sin(x)-x+%k1*%e^(-x)+%k2*%e^x, x=0, y=0, 'diff(y,x)=0);*

と入力します．このとき得られる解は

$$f(x)=-\frac{\sin(x)}{2}-\frac{3e^{-x}}{4}+\frac{3e^{x}}{4}-x$$

となります．