

== 行列の固有値 ==

- 固有値の定義については→この頁
 - 固有値の求め方については→この頁
- を各々参照してください。

※正しい番号をクリックしてください。

平成16年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について、 A^2 の大きい方の固有値は次のどれか。

- 1 2 2 4 3 8 4 16 5 32

○ HELP

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

次の固有方程式を解いて、固有値を求める

$$\det \begin{pmatrix} 10-\lambda & -9 \\ -6 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(10-\lambda)(7-\lambda) - 54 = 0$$

$$\lambda^2 - 17\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-16) = 0$$

$$\lambda = 1, 16$$

大きい方の固有値は、16 → 4

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 1 に属する固有ベクトル

は、次のどれか。

- 1 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

○ HELP

λ が行列 A の固有値であるとき、

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

固有値 λ に属する固有ベクトルとは、

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} \cdots (*)$$

となるベクトル \vec{x} ($\neq \vec{0}$) のことをいう。

(これに対して、固有値は 0 となることがあります)

※ \vec{x} が (*) を満たすとき、その定数倍のベクトルも (*) を満たす

$$(*) \rightarrow (A - \lambda E)(k\vec{x}) = \vec{0}$$

から、固有ベクトルは大きさを除いて定まる。

固有値 $\lambda = 1$ に属する固有ベクトル \vec{x} は

$$(A - E)\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$$

を満たす。

○この頁に登場する【問題】は、公益社団法人日本技術士会のホームページに掲載されている「技術士第一次試験過去問題 共通科目A 数学」の引用です。(=公表された著作物の引用)

○【解説】は個人の試案ですが、Web教材化にあたって「問題の転記ミス」「考え方の間違い」「プログラムの作動ミス」などが含まれる場合があります。

問題や解説についての質問等は、原著作者を煩わせることなく、当Web教材の作成者 (<浅尾>mwm48961@uniteddigital.com) に対して行ってください。

平成17年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値のうち、正であるものは次の

どれか。

- 1 4 2 5 3 6 4 7 5 8

○ HELP

次の固有方程式を解いて、固有値を求める

$$\det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -8 & -1 \\ 0 & 0-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(8-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$(8-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\lambda = -1, 8$$

正であるのは $\lambda = 8$ → 5

平成19年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は、次のどれか。

- 1 2と5 2 1と4 3 0と3 4 -1と4 5 -2と5

○ HELP

次の固有方程式を解いて、固有値を求める

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

$$\lambda = -1, 4 \rightarrow 4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$-y+2z=0, -x=0, 2x=0 \Leftrightarrow y=2z, x=0$$

したがって、 t を任意の値($\neq 0$)として

$$x=0, y=2t, z=t \Leftrightarrow t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (t \neq 0) \text{ が固有ベクトルとなる.}$$

問題文に沿って大きさを1つ選ぶと $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2$

平成20年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & a \end{pmatrix}$ の固有値が 4 と -1 のとき、 a の値は次のどれか。

- 1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

HELP

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 3 & a-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(a-\lambda) - 3a = 0$$

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda - 2a = 0$$

$\lambda=4$ が固有値だから

$$16 - 4(a+1) - 2a = 0 \rightarrow -6a + 12 = 0 \rightarrow a = 2$$

$\lambda=-1$ が固有値だから

$$1 + (a+1) - 2a = 0 \rightarrow -a + 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

$a=2$ は両方を満たす $\rightarrow 2$

平成22年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は、次のどれか。

- 1 0, 1, 3 2 -1, 1, 3 3 1, 2, 3 4 -3, -1, 0
 5 -1, 0, 2

HELP

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

0を含む3行目に沿って展開する

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1-\lambda & 0 \end{pmatrix} + (-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1+\lambda) + (-1-\lambda)\{(-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1\} = 0$$

$$(1+\lambda) + (-1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 1) = 0$$

$$(1+\lambda) + (-1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$$

$$(1+\lambda) - (1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$$

$$(1+\lambda)(1 - \lambda^2 - 3\lambda - 1) = 0$$

$$(1+\lambda)(-\lambda^2 - 3\lambda) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

$$(\lambda+1)\lambda(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda=0, -1, -3 \rightarrow 4$$

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は、次のどれか。

- 1 -5, -2 2 -4, -3 3 1, 6 4 2, 5 5 3, 4

HELP

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda=2, 5 \rightarrow 4$$

平成23年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -2 \end{pmatrix}$ が固有値 $-3, 2$ をもつとき、 a の値は次のどれか。

- 1 -1 または 0 2 -1 または 1 3 -2 または 1
 4 -2 または 2 5 -3 または 2

HELP

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ a & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda) - a^2 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+2) - a^2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 - a^2 = 0$$

$\lambda=-3$ が固有値だから

$$9 - 3 - 2 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$\lambda=2$ が固有値だから

$$4 + 2 - 2 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

$a = \pm 2$ は両方を満たす $\rightarrow 4$

平成24年度技術士第一次試験問題[共通問題]

【数学】Ⅲ-20

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の正の固有値は、次のどれか。

1 1 2 2 3 3 4 4 5 5

 HELP

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 4 \\ 4 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

0の多い3行目に沿って展開

$$(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\lambda = 3, -1$$

正の固有値は $\lambda = 3 \rightarrow$ 3