== 固有値，固有ベクトルの求め方 ==

■固有値，固有ベクトルを求めるには

与えられた正方行列 A の固有値，固有ベクトルを求めるには，次のようにすればよい．

(1) 行列 A の固有方程式

$$det(A-\lambda E)=0$$

を未知数 λ の方程式として解いて固有値 λ を求める．

A がn次正方行列のとき，固有値は[重解・虚数解も含めると]全部でn個ある．

(2) 各々の固有値を連立方程式

$$(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$$

に代入して，対応する固有ベクトル $\vec{x}$ を求める．

固有ベクトルの定数倍もまた固有ベクトルとなるので，固有ベクトルを答えるときはのように任意定数を付けた形で答えるとよい．

例1　$A=$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

（解答）

(1) まず，固有方程式 $det=0$ を解いて固有値を求める．

$(8-\lambda)(5-\lambda)-4=0$

$\lambda^2-13\lambda+40-4=0$

$\lambda^2-13\lambda+36=0$

$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$

$\lambda=4,9$

(2) 次に，各々の固有値に対応する固有ベクトルを求める．

(i) $\lambda_1=4$ を $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$ $4x_1+x_2=0$

$\longleftrightarrow$ （t は任意定数，$t\neq0$）

となるから，

固有ベクトルは （t は任意定数，$t\neq0$）

(ii) $\lambda_2=9$ を $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$ $-x_1+x_2=0$

$\longleftrightarrow$ （t は任意定数，$t\neq0$）

となるから，

固有ベクトルは （t は任意定数，$t\neq0$）

ゆえに，

固有値 $\lambda_1=4$，固有ベクトル （t は任意定数，$t\neq0$）

固有値 $\lambda_2=9$，固有ベクトル （t は任意定数，$t\neq0$）…（答）

※この結果，行列 $\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}$ による一次変換で方向が変わらないベクトル（固有ベクトル）が2つあることになります．

1つは $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ に平行なベクトルで，

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-16\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-32\end{pmatrix}$$

のように方向が変わらず大きさが固有値 $\lambda_1=4$ 倍になります

もう一つは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に平行なベクトルで，

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\18\end{pmatrix}$$

のように方向が変わらず大きさが固有値 $\lambda_2=9$ 倍になります

○ 与えられた正方行列 A に対して

零ベクトルでなく：

$\vec{x}\neq\vec{0}$ …(*1)

方向が変わらない：

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ …(*2)

となるようなベクトル $\vec{x}$ が存在するとき，

λ を行列 A の固有値，$\vec{x}$ を固有ベクトルという．

○ (2)式を変形すると

$(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ …(*3)

となるが，

一般に，与えられた正方行列 P に逆行列（P^{-1}）が存在すれば（$det(P)\neq0$ のとき）

$$P\vec{x}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \vec{x}=P^{-1}\vec{0}=\vec{0}$$

となり，$P\vec{x}=\vec{0}$ を満たすベクトルは自明解 $\vec{x}=\vec{0}$ だけとなる．

したがって，自明解でない解が存在するためには

P^{-1} が存在しないこと

$\longleftrightarrow$ $det(P)=0$

が条件となる．

(*3)式が自明解でない解をもつ条件は $det(A-\lambda E)=0$ になる．

○ $det(A-\lambda E)$ は λ のn次式になり，行列 A の固有多項式と呼ばれる．

また，$det(A-\lambda E)=0$ を行列 A の固有方程式という．固有方程式は λ のn次方程式になるので，重解や虚数解をもつ場合もすべて数えると全部でn個の解をもつ．

○ 解が不定となる連立方程式の解き方1

未知数が2個の連立方程式で2つの方程式が同じ式であるとき

例

これらの連立方程式は，次の方程式が1つ与えられているのと同じになる．

$$4x+y=0 \quad\cdots(A)$$

未知数が2個で方程式が1つなので，通常の連立方程式のように例えば $x=2$，$y=3$ というような確定的な解はない．（不定形の解になる．）

実際には，「$4x+y=0$ を満たす x，y の組」はすべて解となる．

図形的には，「直線 $4x+y=0$ 上の点 (x,y)」はすべて解となる．…(C)

問題によっては(C)のように文章で答えてもよいが，以下において連立方程式の不定解の表し方を考える．

(A)だけでは方程式が1つしかないので，1つの文字についてだけ解くことができもう一つの文字については解くことができないと考えるとよい．見た目で混乱しないように解くことをあきらめる方の文字は右辺に移項してかっこに入れてしまうとよい．

$$y=(-4x)$$

実質的にはこれで答えになっているが，もともと未知数が2個あったのに対して，この形では y だけに「ひいき」していて x を「安っぽく」扱っているように見えるので，どちらにも偏らない第3の変数 t を導入して，次のように表すと「見た目にもスマート」で「各々の変数を分けて表せる」．

この解をベクトルの形式で表すと

となるが，このベクトルは次のように書ける．

[注]

(A)式を $x=\cdots$ の形にしてもよいが，その場合は途中経過と結果に分数が残り「見た目がスマートではない」のでこの形を好む解答者や採点官はあまりいない．（数学的にはまったく問題ない．）

$$x=\begin{pmatrix}-\frac{y}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{s}{4}\\ y=s\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\ 1\end{pmatrix}$$

例2　$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

（解答）

(1) まず，固有方程式 $det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&2\\0&2-\lambda&-1\\0&0&3-\lambda\end{pmatrix}=0$ を解いて固有値を求める．

$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+0\cdot0\cdot2+0\cdot1\cdot(-1)-(1-\lambda)\cdot(-1)\cdot0-0\cdot1\cdot(3-\lambda)-0\cdot2\cdot(2-\lambda)=0$

$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$

$\lambda=1,2,3$

(2) 次に，各々の固有値に対応する固有ベクトルを求める．

(i)　$\lambda_1=1$ を $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases}x_2+2x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ 2x_3=0\end{cases}$$

$0x_1=0$ は，どんな実数 x_1 についても成り立つから，$x_1=t$

（t は任意定数，$t\neq0$）

$$\longleftrightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

（t は任意定数，$t\neq0$）

となるから，

固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　（t は任意定数，$t\neq0$）

(ii)　$\lambda_2=2$ を $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=0\\ -x_3=0\\ x_3=0\end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=t\\ x_3=0\end{cases}$$

（t は任意定数，$t\neq0$）

となるから，

固有ベクトルは $t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　（t は任意定数，$t\neq0$）

(iii)　$\lambda_3=3$ を $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}-2&1&2\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

○　解が不定となる連立方程式の解き方2

未知数が3個の方程式2つのときも上と同様にして「1つの文字について解くのをあきらめる」とよい．

例

$$\begin{cases}2x+y-z=0\cdots(A)\\ x-y-z=0\cdots(B)\\ 3x-3y-3z=0\cdots(C)\end{cases}$$

(B)(C)は同じ式だからこれらは次の連立方程式と同じ

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$$

ここで未知数 y について解くのをあきらめると，未知数2個，方程式2個の普通の方程式になって解ける．

$$\begin{cases}2x-z=(-y)\\ x-z=(y)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=(-2y)\\ z=(-3y)\end{cases}$$

y の代わりに第3の変数 t を立てる

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-2t\\ y=t\\ z=-3t\end{cases}$$

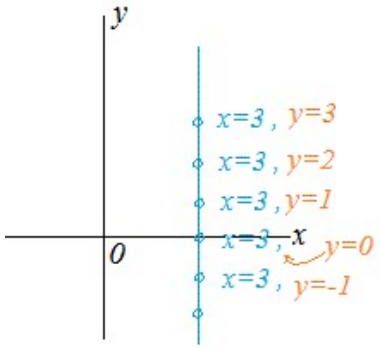
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

○　解が不定となる連立方程式の解き方3

条件式がない変数は任意の値をとることができる．

例

(i)において未知数が x_1, x_2, x_3 で $x_2=0, x_3=0$ という解が得られたとき，x_1 は制限条件が何もない．このとき，x_1 は任意定数になる．この事情を中学校で習った直線の方程式で思い出してみると．点(3，0)を通り x 軸と垂直な直線は次の図のような点を通っている．



これらの点は x 座標が3で y 座標はいろいろな値がある．実は $x=3$ という条件を満たしていれば y はどんな値でもあり制限がない．

方程式では制限のないものは書かないので，この直線の方程式は $x=3$ と書く．

逆に，方程式が $x=3$ であるということは y は任意の値をとれるということを表している．

$x=3 \longleftrightarrow x=3, y$ は任意 $\longleftrightarrow (3, t)$ で表される点はす

$$\longleftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad (t \text{ は任意定数}, t \neq 0)$$

となるから,

固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

ゆえに,

固有値 $\lambda_1 = 1$, 固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

固有値 $\lambda_2 = 2$, 固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

固有値 $\lambda_3 = 3$, 固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$) …(答)

べて $\longleftrightarrow x=3, y=t$

(なお, この直線は原点を通らないので, $(x,y)=t(\ldots, \ldots)$ の形には書けない)

以上の簡単な復習から分かるように, 左の連立方程式において, 未知数が x_1 , x_2 , x_3 で $x_2=0$, $x_3=0$ という条件になるということは, x_1 には条件が指定されていないということで

x_1 は任意定数

$x_2=0$

$x_3=0$

ということになる.

したがって, $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

が解となる.

■問題■ 次の行列の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(解答)

(1)

固有値 -1 , 固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

固有値 4 , 固有ベクトル $t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (t は任意定数 , $t \neq 0$)

(2)

(※成分に分けて書くと)

固有値 2 , 固有ベクトル $x_1=0, x_2=0, x_3=t$

固有値 -1 , 固有ベクトル $x_1=t, x_2=t, x_3=-t$

固有値 1 , 固有ベクトル $x_1=-t, x_2=t, x_3=-3t$

(いずれも, t は任意定数 , $t \neq 0$)