※固有値と固有ベクトルは wxMaximaを使うと簡単に求めることができます. →この頁

※【その他，固有値，固有ベクトル練習用の問題】

(1) 2次の正方行列が異なる2つの実固有値を持つ場合

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

引用元:ラング「線形代数学(下)」(芹沢正三訳/ちくま学芸文庫)p.078

固有方程式(特性方程式)は

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0$$

より

$$(2-\lambda)(3-\lambda)-20=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+6-20=0$$
$$\lambda^2-5\lambda+-14=0$$
$$(\lambda+2)(\lambda-7)=0$$

固有値は $\lambda=-2,7$

$\lambda=-2$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} 4x+4y=0 \\ 5x+5y=0 \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow x+y=0$$
$$\longleftrightarrow y=(-x)$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (t は任意の数)

$\lambda=7$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} -5x+4y=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow 5x-4y=0$$
$$\longleftrightarrow y=(\frac{5}{4}x)$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{5}{4}t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$ (t は任意の数)

これは $s\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (s は任意の数)と書いてもよい

.....

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A : matrix([2,4],[5,3]);
```

と入力し,

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

```
[[[7,-2],[1,1]],[[[1,5/4]],[[1,-1]]]]
```

という結果が得られる.
これは固有値7は重複度1で, これに対応する固有ベクトルが

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

固有値−2は重複度1でこれに対応する固有ベクトルが $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

であることを示している.

(2) 2次の正方行列が1つの実固有値(2重解)を持つ場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

引用元:ラング「線形代数学(下)」(芹沢正三訳/ちくま学芸文庫)p.079

固有方程式(特性方程式)は

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=0$$

より

$$(1-\lambda)^2-0=0$$
$$(\lambda-1)^2=0$$

固有値は $\lambda=1$ (2重解)

$\lambda=1$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$y=0$ 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (t は任意の数)

.....

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A : matrix([1,1],[1,0]);
```

と入力し,

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

```
[[[1],[2]],[[[1,0]]]]
```

という結果が得られる.
これは固有値1は重複度2で, これに対応する固有ベクトルが $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示している.

(3) 実係数の2次の正方行列が異なる2つの虚数の固有値を持つ場合

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

引用元:ラング「線形代数学(下)」(芹沢正三訳/ちくま学芸文庫)p.078

固有方程式(特性方程式)は

(4) 複素成分の2次の正方行列が異なる2つの固有値を持つ場合

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

引用元:ラング「線形代数学(下)」(芹沢正三訳/ちくま学芸文庫)p.078

固有方程式(特性方程式)は

$$det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}=0$$

より

$$(3-\lambda)^2+4=0$$
$$(\lambda-3)^2+4=0$$
$$\lambda^2-6\lambda+13=0$$

2次方程式の解の公式により固有値は $\lambda=3\pm2i$

$\lambda=3-2i$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}2i & 2\\ -2 & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} xi+y=0\ldots(1)\\ -x+yi=0\ldots(2)\end{cases}$$

(1)の両辺に i を掛けると(2)に一致するから(1)⟷(2)

$\longleftrightarrow xi+y=0$

$\longleftrightarrow y=(-xi)$

固有ベクトルは

$\begin{pmatrix}t\\ -ti\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）

$\lambda=3+2i$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}-2i & 2\\ -2 & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} -xi+y=0\ldots(1)\\ -x-yi=0\ldots(2)\end{cases}$$

(1)の両辺に $-i$ を掛けると(2)に一致するから(1)⟷(2)

$\longleftrightarrow -xi+y=0$

$\longleftrightarrow y=(xi)$

固有ベクトルは

$\begin{pmatrix}t\\ ti\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）

これらは $s\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）と書いてもよい

……

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A : matrix([3,2],[-2,3]);
```

と入力し，

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

$$[[[3-2\%i,2\%i+3],[1,1]],[[[1,\%i]],[[1,-\%i]]]]$$

という結果が得られる．
これは固有値 $3-2i$ は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$，
固有値 $2i+3$ は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ であることを示している．

$$det\begin{pmatrix}1-\lambda & i\\ i & -2-\lambda\end{pmatrix}=0$$

より

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)-i^2=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda+2)+1=0$$
$$\lambda^2+\lambda-1=0$$

2次方程式の解の公式により固有値は $\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\lambda=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{5}}{2} & i\\ i & \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2}x+yi=0 & \ldots(1)\\ xi+\frac{-3+\sqrt{5}}{2}y=0 & \ldots(2)\end{cases}$$

(1)の両辺に $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}i$ を掛けると(2)に一致するから

(1)⟷(2)

$\longleftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x+yi=0$

$\longleftrightarrow y=-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2i}x=(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}xi)$

固有ベクトルは

$\begin{pmatrix}t\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}ti\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）

$\lambda=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt{5}}{2} & i\\ i & \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2}x+yi=0 & \ldots(1)\\ xi+\frac{-3-\sqrt{5}}{2}y=0 & \ldots(2)\end{cases}$$

(1)の両辺に $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}i$ を掛けると(2)に一致するから

(1)⟷(2)

$\longleftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x+yi=0$

$\longleftrightarrow y=-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2i}x=(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}xi)$

固有ベクトルは

$\begin{pmatrix}t\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}ti\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）

これらは $s\begin{pmatrix}2\\ (3-\sqrt{5})i\end{pmatrix}$ （t は任意の数）と書いてもよい

……

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A : matrix([1,%i],[%i,-2]);
```

と入力し，

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

$$[[[-\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}],[1,1]],$$
$$[[[1,\frac{(\sqrt{5}+3)i}{2}]],[[1,-\frac{(\sqrt{5}-3)i}{2}]]]]$$

という結果が得られる.
これは固有値 $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ \frac{(\sqrt{5}+3)i}{2}\end{pmatrix}$,
固有値 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\ -\frac{(\sqrt{5}-3)i}{2}\end{pmatrix}$ であることを示している.

(5) 3次の正方行列が異なる3つの実固有値を持つ場合

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ -3 & -6 & -6\end{pmatrix}$$

引用元：ラング「線形代数学（下）」
（芹沢正三訳/ちくま学芸文庫）p.078

固有方程式（特性方程式）は

$$det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 2-\lambda & 2\\ -3 & -6 & -6-\lambda\end{pmatrix}=0$$

より

$$(-1-\lambda)det\begin{pmatrix}2-\lambda & 2\\ -6 & -6-\lambda\end{pmatrix}$$
$$-2det\begin{pmatrix}2 & 2\\ -6 & -6-\lambda\end{pmatrix}$$
$$-3det\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2-\lambda & 2\end{pmatrix}=0$$
$$(-1-\lambda)((2-\lambda)(-6-\lambda)+12)$$
$$-2(2(-6-\lambda)+12)$$
$$-3(4-2(2-\lambda))=0$$

この式を簡単にすると

$$\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

固有値は $\lambda=-3,-2,0$

$\lambda=-3$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ -3 & -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}2x+2y+2z=0\\ 2x+5y+2z=0\\ -3x-6y-3z=0\end{cases}$$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{cases}x+y+z=0\ldots(1)\\ 2x+5y+2z=0\ldots(2)\\ x+2y+z=0\ldots(3)\end{cases}$$

(1)−(3)より $y=0$

これを使って(1)(2)(3)を書き直すとすべて $x+z=0$ になるから

$$\begin{cases}y=0\\ z=(-x)\end{cases}$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}t\\ 0\\ -t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$ （t は任意の数）

$\lambda=-2$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

(6) 3次の正方行列が1つの実数解と1つの2重解とを持つ場合

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

引用元：新編 高専の数学2 問題集
（田代嘉宏編/森北出版）p.112

固有方程式（特性方程式）は

$$det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 2 & 2-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=0$$

より

$$(1-\lambda)det\begin{pmatrix}2-\lambda & 2\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$
$$-2det\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$
$$+det\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2-\lambda & 2\end{pmatrix}=0$$
$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2-2)-2+2(2-\lambda)=0$$

この式を簡単にすると

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$

因数定理を用いて因数分解する．$\lambda=1$ を代入すると成り立つから左辺は $\lambda-1$ で割り切れる．因数分解すると

$$(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

固有値は $\lambda=1,2$ （$\lambda=2$ は2重解）

$\lambda=1$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}-z=0\ldots(1)\\ 2x+y+2z=0\ldots(2)\\ 2x+y+z=0\ldots(3)\end{cases}$$

(1)より $z=0$

これを使って(2)(3)を書き直すと $2x+y=0$ になるから

$$\begin{cases}z=0\\ y=(-2x)\end{cases}$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}t\\ -2t\\ 0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$ （t は任意の数）

$\lambda=2$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases}-x-z=0\ldots(1)\\ 2x+2z=0\ldots(2)\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \\ -3x-6y-4z=0 \end{cases}$$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+2y+2z=0\ldots(1) \\ x+2y+z=0\ldots(2) \\ 3x+6y+4z=0\ldots(3) \end{cases}$$

(1)−(2)より $z=0$

これを使って(1)(2)(3)を書き直すとすべて $x+2y=0$ になるから

$$\begin{cases} z=0 \\ y=(-\frac{1}{2}x) \end{cases}$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ -\frac{t}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ （t は任意の数）

$\lambda=0$ のとき $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} -x+2y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ -3x-6y-6z=0 \end{cases}$$

$\longleftrightarrow$

$$\begin{cases} -x+2y+2z=0\ldots(1) \\ x+y+z=0\ldots(2) \\ x+2y+2z=0\ldots(3) \end{cases}$$

(1)−(3)より $x=0$

これを使って(1)(2)(3)を書き直すとすべて $y+z=0\longleftrightarrow z=(-y)$ になるから

$$\begin{cases} x=0 \\ z=(-y) \end{cases}$$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ （t は任意の数）

※固有ベクトルが零ベクトルになることはないが，固有値が0になることはあります．固有値が0の場合はこの問題のように $t\neq 0$ となるどんな値 t についても，零ベクトルではないベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ が

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって原点 $(0,0,0)$ に移されます．

……

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A:matrix([-1,2,2],[2,2,2],[-3,-6,-6]);
```

と入力し，

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

```
[[[-3,-2,0],[1,1,1]],[[[1,0,-1]],[[1,-1/2,0]],[[0,1,-1]]]]
```

という結果が得られる．
これは固有値−3は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

固有値−2は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが

$$\begin{cases} \\ 2x+y=0\ldots(3) \end{cases}$$

(1)−(2)より $z=(-x)$
(3)より $y=(-2x)$
固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ -t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ （t は任意の数）

……

wxMaximaでは
Enterキーを押して入力欄を作り

```
A:matrix([1,0,-1],[2,2,2],[2,1,2]);
```

と入力し，

```
eigenvectors(A);
```

とすれば

```
[[[1,2],[1,2]],[[[1,-2,0]],[[1,-2,-1]]]]
```

という結果が得られる．
これは固有値1は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

固有値2は重複度2で，これに対応する固有ベクトルが $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

であることを示している．

上記の途中経過に登場する3元連立1次方程式(1)82)(3)を解くには

```
linsolve([-x-z=0,2*x+2*z=0,2*x+y=0],[x,y,z]);
```

などと入力すればよく，そのとき得られる出力

```
[x=%r2,y=-2*%r2,z=-%r2]
```

は，%r2が上記の解説のtに対応するパラメータで，このパラメータで表示される不定解となることを示している．

$$t\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},$$

固有値0は重複度1で，これに対応する固有ベクトルが

$t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ であることを示している．

上記の途中経過に登場する3元連立1次方程式を解くには

```
linsolve([2*x+2*y+2*z=0, 2*x+5*y+2*z=0, -3*x-6*y-3*z=0], [x,y,z]);
```

などと入力すればよく，そのとき得られる出力

```
[x=-%r1,y=0,z=%r1]
```

は，%r1が上記の解説のtに対応するパラメータで，このパラメータで表示される不定解となることを示している．

*** メモ ***

〇ここまでは，行列→固有値→固有ベクトルの順に求めるという基本を解説しており，この基本を身に付けてもらうことが重要なことですが，「必ず固有値が固有ベクトルよりも先に決まるとは限りません」．

〇何らかの事情で固有ベクトルが先に求まった場合にも，それに対応する固有値を求めることができます．

問題(1)を例にとって示します．

行列 A の固有値が λ でこれに対応する固有ベクトルが $\vec{x}$ であるとき，

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$

が成り立ちます．

そこで，何らかの事情で $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ であることが分かれば

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

により，固有値 -1 が求められます．

同様にして $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有ベクトルが $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ であることが分かれば

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

により，固有値 4 が求められます．

※固有ベクトルを0倍以外の定数倍したものもまた固有ベクトルなので，上記の議論は $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有ベクトルを $\begin{pmatrix}s\\-s\end{pmatrix}(s\neq0)$ とした場合でも同様に

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\s\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}s\\-s\end{pmatrix}$$

により，固有値 -1 が求められます．

$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有ベクトルを $\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}(s\neq0)$ とした場合でも同様に

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8t\\12t\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}$$

により，固有値 4 が求められます．

〇さらに，固有値と固有ベクトルの組が与えられれば元の行列は次のように復元できる．

問題(1)を例にとって示します．

行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ が未知で，

固有値 -1 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

固有値 4 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ であるとき

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$$

まとめて書くと

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&8\\1&12\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&8\\1&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&8\\1&12\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$$

となって，元の行列 A が求められる．

※固有ベクトルを0倍以外の定数倍したものもまた固有ベクトルなので，上記の議論は，固有値 -1 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}s\\-s\end{pmatrix}$，固有値 4 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}$ としたときも同様にして

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&2t\\-s&3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s&8t\\s&12t\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s&8t\\s&12t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&2t\\-s&3t\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}-s&8t\\s&12t\end{pmatrix}\frac{1}{5st}\begin{pmatrix}3t&-2t\\s&s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$$

となって，元の行列 A が求められる．

【要約】 行列A ←→ 固有値，固有ベクトルのすべての組

(7)

行列 $\begin{pmatrix}3&-5\\0&-2\end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ に対応する固有値を求めてください．また，固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ に対応する固有値を求めてください．

解説

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}\quad(\vec{x}\neq\vec{0})$ となる値 λ が固有値です．

$\begin{pmatrix}3&-5\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ だから固有値は -2 です．

また

(9)

固有値 -3 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ で，固有値 4 に対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ となる行列を求めてください．

解説

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$$

これらをまとめて書くと

$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから固有値は 3 です.

(8)
行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値を求めてください. また, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対応する固有値を求めてください.

解説

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だから固有値は -3 です.

また

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ だから固有値は 1 です.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$