

■角の二等分線と補助線

【比例⇔相似図形】

平行線の性質(相似)を利用すると、比例の関係を示すことができます。

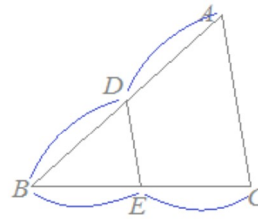
例えば右図1において

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \text{ ならば } BD:DA=BE:EC$$

が成り立つと言えます。

- 比例の関係を証明したいときには、平行線になるように補助線を引くとうまくできます。
- この頁では、角の二等分線を題材にして、補助線の引き方を練習します。

図1



【角の二等分線の性質】

$\triangle ABC$ において右図2のように線分ADが $\angle A$ を二等分しているとき、

$$BD:DC=BA:AC$$

が成り立ちます。

※この定理は中学校では習いませんので、中学生に対して「覚えなさい」とか「この問題がよく出る」というようなことは言えませんが、ヒントを示してこの定理を誘導する問題ならあります。

角の二等分線の性質は高校数学Aの教科書で登場しますが、数学Aの中で平面幾何を選択することはほとんどないため、この定理に接する機会はめったにありません。

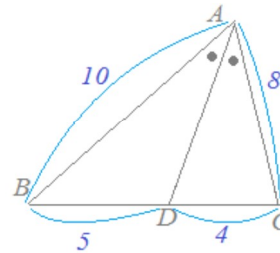
《注意すべきこと》

右図2ではDはBCの中点ではありません。右図2のように頂点Aが右寄りになっているとき $\angle BAD = \angle DAC$ としたとき(角の二等分線を引いたとき)には、BDの方がDCよりも長くなります。

まずはじめに、この頁ではDがBCの中点になっている話をしていいるのではなく、ADが $\angle A$ の二等分になっている場合を取り扱っていることに注意してください。

$\triangle ABC$ が二等辺三角形になるような特別な場合を除けば、一般には $BD \neq DC$ になり、角の二等分線ADによって辺BCは二等分されません。

図2



例1

$\triangle ABC$ において線分ADが $\angle A$ を二等分しているとき、右図3のようにCからDAに平行線を引きBAの延長との交点をEとおくと、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます。

(証明)

AD//ECだから、平行線の性質(または相似図形の性質)により

$$BD:DC=BA:AE \dots(1)$$

また、次のようにして $AE=AC$ を示すことができる。

仮定によりADは $\angle BAC$ の二等分線だから

$$\angle BAD = \angle DAC \dots(2)$$

平行線の同位角は等しいから

$$\angle BAD = \angle AEC \dots(3)$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle DAC = \angle ACE \dots(4)$$

(2)(3)(4)より

$$\angle AEC = \angle ECA \dots(5)$$

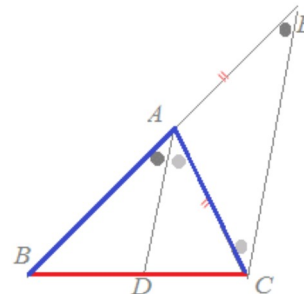
$\triangle ACE$ は両底角が等しいから二等辺三角形で

$$AE=AC \dots(6)$$

(1)(6)より

$$BD:DC=BA:AC \dots(\text{証明終り})$$

図3



【要約】

- 補助線として平行線を引くと、相似図形ができて比例が証明できる。

問1

$\triangle ABC$ において線分ADが $\angle A$ を二等分しているとき、右図4のようにBからDAに平行線を引きCAの延長との交点をEとおくと、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます。次の空欄を埋めてください。

(証明)

BE//DAだから、平行線の性質(または相似図形の性質)により

$$BD:DC=EA:AC \dots(1) \text{ ()}$$

また、次のようにして $EA=BA$ を示すことができる。

仮定によりADは $\angle BAC$ の二等分線だから

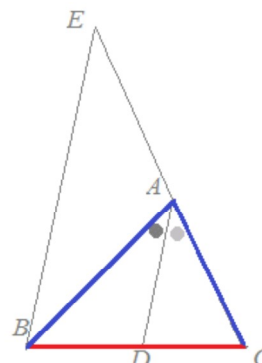
$$\angle BAD = \angle DAC \dots(2) \text{ ()}$$

BE//DAで平行線の同位角は等しいから

$$\angle BEA = \angle DAC \dots(3) \text{ ()}$$

BE//DAで平行線の錯角は等しいから

図4



$\angle EBA = \angle BAD$... (4)
 (2)(3)(4)から
 $\angle BEA = \angle EBA$... (5)
 $\triangle BEA$ は両底角が等しいから二等辺三角形で
 $BA = EA$... (6)
 (1)(6)より
 $BD:DC = BA:AC$... (証明終り)

採点する やり直す Help

AC
 DAC
 DAC
 BAD
 EBA
 EA
 AC

問2

$\triangle ABC$ において線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき、右図5のように C から AB に平行線を引き AD の延長との交点を E とおくと、 $BD:DC = BA:AC$ となることを証明することができます。次の空欄を埋めてください。

(証明)

はじめに、 $\triangle BDA \sim \triangle CDE$ を使って $BD:DC = BA:EC$ を示し、次に $EC = AC$ を示すという方針で証明します。

$\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ について

$AB \parallel CE$ により、平行線の錯角が等しいから

$\angle BAD = \angle CED$... (1)

対頂角は等しいから

$\angle BDA = \angle CDE$... (2)

(1)(2)により対応する2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \sim \triangle ECD$... (3)

(3)により

$BD:DC = BA:EC$... (4)

次に $\triangle AEC$ について

仮定により AD は $\angle BAC$ の二等分線だから

$\angle DAC = \angle BAD$... (5)

$AB \parallel CE$ により、平行線の錯角が等しいから

$\angle DEC = \angle BAD$... (6)

(5)(6)より $\triangle AEC$ は両底角が等しいから二等辺三角形で

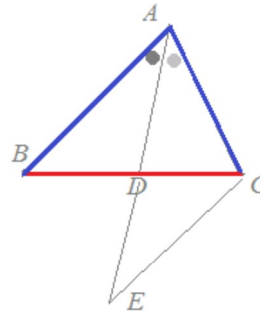
$EC = AC$... (7)

(4)(7)により

$BD:DC = BA:AC$... (証明終り)

採点する やり直す Help

図5



CED
 CDE
 ECD
 EC
 BAD
 BAD
 AC
 AC

問3

$\triangle ABC$ において $\angle A$ の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を D とするとき、右図6のように D から CA に平行線を引き BA の延長との交点を E とおくと、 $BD:DC = BA:AC$ となることを証明することができます。次の空欄を埋めてください。

(証明)

はじめに、 $\triangle BED \sim \triangle BAC$ を使って $BD:DC = BE:EA$ を示し、次に $EA = ED$ 、さらに $BE:ED = BA:AC$ を示すと証明できます。

$\triangle BDE$ と $\triangle BCA$ について

$CA \parallel DE$ により、平行線の性質(相似図形の性質)から

$BD:DC = BE:EA$... (1)

$\triangle EAD$ について

平行線の錯角は等しいから

$\angle CAD = \angle ADE$... (2)

仮定により AD は $\angle A$ の外角の二等分線だから

$\angle CAD = \angle EAD$... (3)

$\triangle EAD$ は両底角が等しいから二等辺三角形になり

$AE = ED$... (4)

(1)(4)により

$BD:DC = BE:ED$... (5)

さらに、 $\triangle EBD \sim \triangle ABC$ により

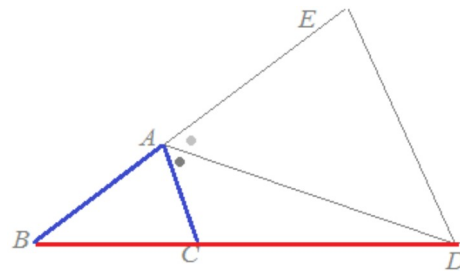
$BE:ED = BA:AC$... (6)

(5)(6)により

$BD:DC = BA:AC$... (証明終り)

採点する やり直す Help

図6



EA
 ADE
 EAD
 ED
 ED
 AC
 AC

問4

図7

△ABCにおいて∠Aの外角の二等分線が辺BCの延長と交わる点をDとすると、右図7のようにCからABに平行線を引きADとの交点をEとおくと、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます。次の空欄を埋めてください。

(証明)

△BDAと△CDEについて

BA//CEより、平行線の性質(相似図形の性質)から

$$BD:DC=BA:CE \quad \dots(1)$$

△ACEについて

平行線の錯角は等しいから

$$\angle FAE = \angle AEC \quad \dots(2)$$

仮定により

$$\angle FAE = \angle EAC \quad \dots(3)$$

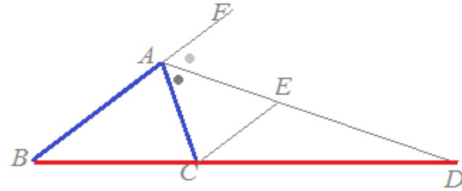
(2)(3)より△ACEは両底角が等しいから二等辺三角形になり

$$EC = AC \quad \dots(4)$$

(1)(4)により

$$BD:DC=BA:AC \quad \dots(5)$$

採点する やり直す Help



CE
AEC
EAC
AC
AC

問5

△ABCにおいて∠Aの外角の二等分線が辺BCの延長と交わる点をDとすると、右図8のようにCからADに平行線を引きABとの交点をEとおくと、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます。次の空欄を埋めてください。

(証明)

△BDAと△BCEについて

DA//CEより、平行線の性質(相似図形の性質)から

$$BD:DC=BA:AE \quad \dots(1)$$

△AECについて

平行線の同位角は等しいから

$$\angle FAD = \angle AEC \quad \dots(2)$$

平行線の錯角は等しいから

$$\angle DAC = \angle ACE \quad \dots(3)$$

仮定によりADは∠Aの外角の二等分線だから

$$\angle FAD = \angle DAC \quad \dots(4)$$

(2)(3)(4)により

$$\angle ACE = \angle AEC \quad \dots(5)$$

△AECは両底角が等しいから二等辺三角形になり

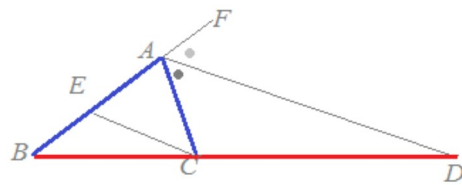
$$AE = AC \quad \dots(6)$$

(1)(6)より

$$BD:DC=BA:AC \quad \dots(\text{証明終り})$$

採点する やり直す Help

図8



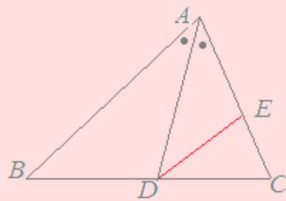
AE
AEC
ACE
DAC
AEC
AC
AC

【証明の進め方】

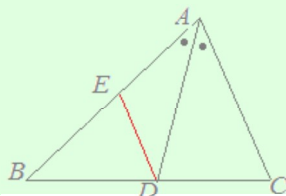
ここまでは実際の証明方法を学んできましたが、慣れてくれば鉛筆を持つ前に**全体の見直し**を立てることが重要です。

問題 左欄のように補助線をひいて証明を行うためには、どのように証明を進めたらよいでしょうか。(証明方法はいろいろ考えられますが、ここでは右欄の方法のうちでよいものを選んでください。)
(はじめに左欄から1つ選び、続いてこれに対応する進め方を右欄から選んでください。)

△ABCにおいて線分ADが∠Aを二等分しているとき、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明するために、図のようにDからBAに平行線を引きACとの交点をEとおいたとき



△ABCにおいて線分ADが∠Aを二等分しているとき、 $BD:DC=BA:AC$ となることを証明するために、図のようにDからCAに平行線を引きABとの交点をEとおいたとき



【考え方のポイント】

入口と出口を確かめてから
間を埋める

入口

$$BD:DC=BA:EC$$

前を見る

間を埋める

$$EC=AC$$

後ろを見る

出口

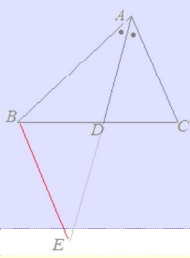
$$BD:DC=BA:AC$$

相似図形の性質から $BD:DC=BE:AC$ を示し、二等辺三角形の性質から $BE=BA$ を示せば、 $BD:DC=BA:AC$ が証明できる。

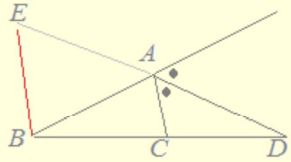
相似図形の性質から $BD:DC=EA:AC$ を示し、

点を E とおいたとき

$\triangle ABC$ において線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき、 $BD:DC=BA:AC$ なることを証明するために、図のように B から AC に平行線を引き AD の延長との交点を E とおいたとき



$\triangle ABC$ において $\angle A$ の外角の二等分線と線分 BC の延長との交点を D とするとき、 $BD:DC=BA:AC$ なることを証明するために、図のように B から CA に平行線を引き AD の延長との交点を E とおいたとき



二等辺三角形の性質から $EA=BA$ を示せば、

$BD:DC=BA:AC$ が証明できる。
相似図形の性質から $BD:DC=BA:EC$ を示し、
二等辺三角形の性質から $EC=AC$ を示せば、
 $BD:DC=BA:AC$ が証明できる。

相似図形の性質から $BD:DC=AE:EC$ を示し、
二等辺三角形の性質から $AE=DE$ を示せば、
 $BD:DC=DE:EC$ が示せて、
さらに相似図形の性質から $BD:DC=BA:AC$ が証明できる。

相似図形の性質から $BD:DC=BE:EA$ を示し、
二等辺三角形の性質から $EA=ED$ を示せば、
 $BD:DC=BE:ED$ が示せて、
さらに相似図形の性質から $BD:DC=BA:AC$ が証明できる。

[〇===メニューに戻る](#)