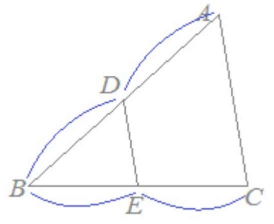
■角の二等分線と補助線

【比例←相似図形】
平行線の性質（相似）を利用すると，比例の関係を示すことができます．
例えば右図1において
$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$ ならば $BD:DA=BE:EC$
が成り立つと言えます．

- 比例の関係を証明したいときには，平行線になるように補助線を引くとうまくできます．
- この頁では，角の二等分線を題材にして，補助線の引き方を練習します．

図1

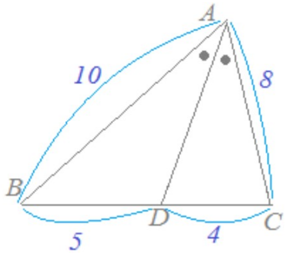


【角の二等分線の性質】
$\triangle ABC$ において右図2のように線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき，
$BD:DC=BA:AC$
が成り立ちます．

※この定理は中学校では習いませんので，中学生に対して「覚えなさい」とか「この問題がよく出る」というようなことは言えませんが，ヒントを示してこの定理を誘導する問題ならありえます．
角の二等分線の性質は高校数学Aの教科書で登場しますが，数学Aの中で平面幾何を選択することはほとんどないため，この定理に接する機会はめったにありません．

≪注意すべきこと≫
右図2では D は BC の中点ではありません．右図2のように頂点 A が右寄りになっているとき $\angle BAD=\angle DAC$ としたとき（**角の二等分線**を引いたとき）には，BD の方が DC よりも長くなります．
まずはじめに，この頁では D が BC の中点になっている話をしているのではなく，AD が $\angle A$ の二等分になっている場合を取り扱っていることに注意してください．
$\triangle ABC$ が二等辺三角形になるような特別な場合を除けば，一般には $BD \neq DC$ になり，角の二等分線 AD によって辺 BC は二等分されません．

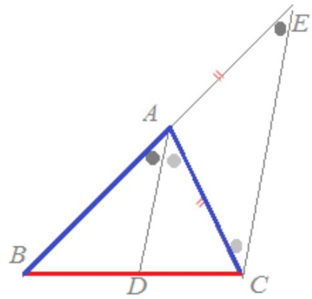
図2



例1
$\triangle ABC$ において線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき，右図3のように C から DA に平行線を引き BA の延長との交点を E とおくと，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます．

（証明）
$AD/\!/EC$ だから，平行線の性質（または相似図形の性質）により
$BD:DC=BA:AE$ …(1)
また，次のようにして $AE=AC$ を示すことができる．
仮定により AD は $\angle BAC$ の二等分線だから
$\angle BAD=\angle DAC$ …(2)
平行線の同位角は等しいから
$\angle BAD=\angle AEC$ …(3)
平行線の錯角は等しいから
$\angle DAC=\angle ACE$ …(4)
(2)(3)(4)より
$\angle AEC=\angle ECA$ …(5)
$\triangle ACE$ は両底角が等しいから二等辺三角形で
$AE=AC$ …(6)
(1)(6)より
$BD:DC=BA:AC$ …(証明終り)

図3

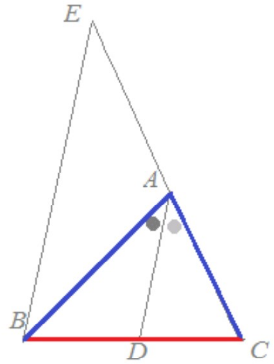


【要約】
- 補助線として平行線を引くと，相似図形ができて比例が証明できる．

問1
$\triangle ABC$ において線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき，右図4のように B から DA に平行線を引き CA の延長との交点を E とおくと，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます．次の空欄を埋めてください．

（証明）
$BE/\!/DA$ だから，平行線の性質（または相似図形の性質）により
$BD:DC=EA:\boxed{\quad}$ …(1)
また，次のようにして $EA=BA$ を示すことができる．
仮定により AD は $\angle BAC$ の二等分線だから
$\angle BAD=\angle\boxed{\quad}$ …(2)
$BE/\!/DA$ で平行線の同位角は等しいから
$\angle BEA=\angle\boxed{\quad}$ …(3)
$BE/\!/DA$ で平行線の錯角は等しいから

図4



$\angle EBA = \angle$　…(4)

(2)(3)(4)から

$\angle BEA = \angle$　…(5)

$\triangle BEA$ は両底角が等しいから二等辺三角形で

$BA=$　…(6)

(1)(6)より

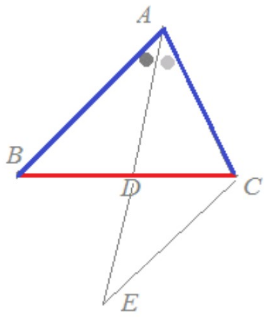
$BD:DC=BA:$　…(証明終り)

採点する　やり直す

問2

$\triangle ABC$ において線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとき，右図5のように C から AB に平行線を引き AD の延長との交点を E とおくと，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます．次の空欄を埋めてください．

図5



(証明)

はじめに，$\triangle BDA \backsim \triangle CDE$ を使って $BD:DC=BA:EC$ を示し，次に $EC=AC$ を示すという方針で証明します．

$\triangle ABD$ と $\triangle ECD$ について

$AB//CE$ により，平行線の錯角が等しいから

$\angle BAD = \angle$　…(1)

対頂角は等しいから

$\angle BDA = \angle$　…(2)

(1)(2)により対応する2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \backsim \triangle$　…(3)

(3)により

$BD:DC=BA:$　…(4)

次に $\triangle AEC$ について

仮定により AD は $\angle BAC$ の二等分線だから

$\angle DAC = \angle$　…(5)

$AB//CE$ により，平行線の錯角が等しいから

$\angle DEC = \angle$　…(6)

(5)(6)より $\triangle AEC$ は両底角が等しいから二等辺三角形で

$EC=$　…(7)

(4)(7)により

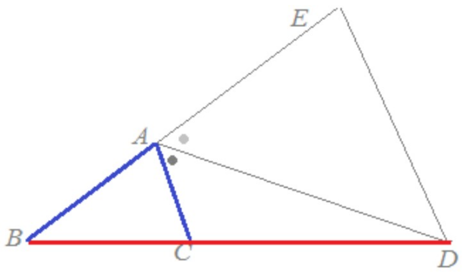
$BD:DC=BA:$　…(証明終り)

採点する　やり直す

問3

$\triangle ABC$ において $\angle A$ の外角の二等分線が辺 BC の延長と交わる点を D とするとき，右図6のように D から CA に平行線を引き BA の延長との交点を E とおくと，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明することができます．次の空欄を埋めてください．

図6



(証明)

はじめに，$\triangle BED \backsim \triangle BAC$ を使って $BD:DC=BE:EA$ を示し，次に $EA=ED$，さらに $BE:ED=BA:AC$ を示すと証明できます．

$\triangle BDE$ と $\triangle BCA$ について

$CA//DE$ により，平行線の性質（相似図形の性質）から

$BD:DC=BE:$　…(1)

$\triangle EAD$ について

平行線の錯角は等しいから

$\angle CAD = \angle$　…(2)

仮定により AD は $\angle A$ の外角の二等分線だから

$\angle CAD = \angle$　…(3)

$\triangle EAD$ は両底角が等しいから二等辺三角形になり

$AE=$　…(4)

(1)(4)により

$BD:DC=BE:$　…(5)

さらに，$\triangle EBD \backsim \triangle ABC$ により

$BE:ED=BA:$　…(6)

(5)(6)により

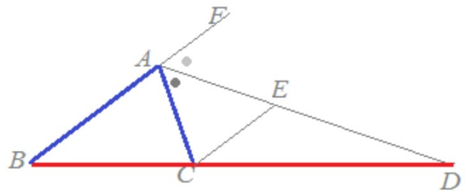
$BD:DC=BA:$　…(証明終り)

採点する　やり直す

問4

図7

△ABCにおいて∠Aの外角の二等分線が辺BCの延長と交わる点をDとするとき，右図7のようにCからABに平行線を引きADとの交点をEとおくと，$BD:DC=BA:AC$となることを証明することができます．次の空欄を埋めてください．



（証明）
△BDAと△CDEについて
$BA//CE$により，平行線の性質（相似図形の性質）から

$BD:DC=BA:$　　…(1)

△ACEについて
平行線の錯角は等しいから

∠FAE=∠　　…(2)

仮定により

∠FAE=∠　　…(3)

(2)(3)より△ACEは両底角が等しいから二等辺三角形になり

EC=　　…(4)

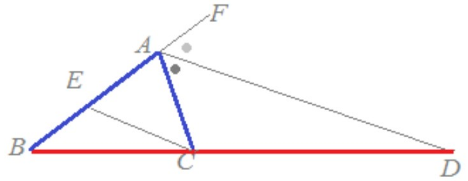
(1)(4)により

$BD:DC=BA:$　　…(5)

採点する　やり直す

問5
△ABCにおいて∠Aの外角の二等分線が辺BCの延長と交わる点をDとするとき，右図8のようにCからADに平行線を引きABとの交点をEとおくと，$BD:DC=BA:AC$となることを証明することができます．次の空欄を埋めてください．

図8



（証明）
△BDAと△BCEについて
$DA//CE$により，平行線の性質（相似図形の性質）から

$BD:DC=BA:$　　…(1)

△AECについて
平行線の同位角は等しいから

∠FAD=∠　　…(2)

平行線の錯角は等しいから

∠DAC=∠　　…(3)

仮定によりADは∠Aの外角の二等分線だから

∠FAD=∠　　…(4)

(2)(3)(4)により

∠ACE=∠　　…(5)

△AECは両底角が等しいから二等辺三角形になり

AE=　　…(6)

(1)(6)より

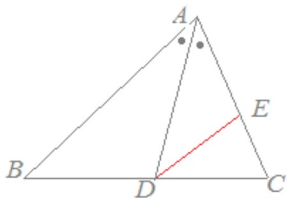
$BD:DC=BA:$　　…(証明終り)

採点する　やり直す

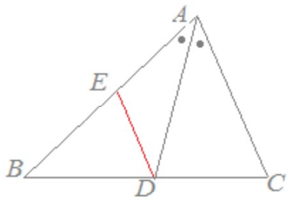
【証明の進め方】
ここまでは実際の証明方法を学んできましたが，慣れてくれば鉛筆を持つ前に全体の見通しを立てることが重要です．

問題　左欄のように補助線をひいて証明を行うためには，どのように証明を進めたらよいでしょうか．（証明方法はいろいろ考えられますが，ここでは右欄の方法のうちでよいものを選んでください．）
（はじめに左欄から1つ選び，続いてこれに対応する進め方を右欄から選んでください．）

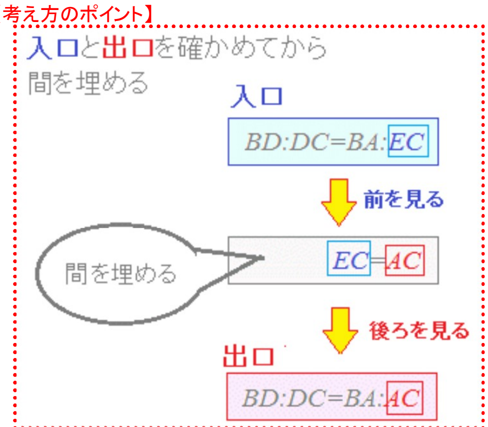
△ABCにおいて線分ADが∠Aを二等分しているとき，$BD:DC=BA:AC$となることを証明するために，図のようにDからBAに平行線を引きACとの交点をEとおいたとき



△ABCにおいて線分ADが∠Aを二等分しているとき，$BD:DC=BA:AC$となることを証明するために，図のようにDからCAに平行線を引きABとの交

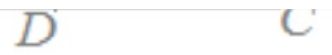


【考え方のポイント】



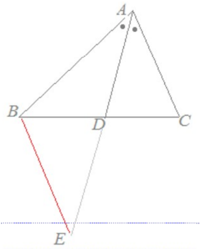
相似図形の性質から$BD:DC=BE:AC$を示し，
二等辺三角形の性質から$BE=BA$を示せば，
$BD:DC=BA:AC$が証明できる．

相似図形の性質から$BD:DC=EA:AC$を示し，

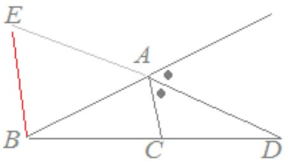


点を E とおいたとき

△ ABC において線分 AD が∠ A を二等分しているとき，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明するために，図のように B から AC に平行線を引き AD の延長との交点を E とおいたとき



△ ABC において∠ A の外角の二等分線と線分 BC の延長との交点を D とするとき，$BD:DC=BA:AC$ となることを証明するために，図のように B から CA に平行線を引き AD の延長との交点を E とおいたとき



二等辺三角形の性質から $EA=BA$ を示せば，
$BD:DC=BA:AC$ が証明できる.

相似図形の性質から $BD:DC=BA:EC$ を示し，
二等辺三角形の性質から $EC=AC$ を示せば，
$BD:DC=BA:AC$ が証明できる.

相似図形の性質から $BD:DC=AE:EC$ を示し，
二等辺三角形の性質から $AE=DE$ を示せば，
$BD:DC=DE:EC$ が示せて，
さらに相似図形の性質から $BD:DC=BA:AC$ が証明できる.

相似図形の性質から $BD:DC=BE:EA$ を示し，
二等辺三角形の性質から $EA=ED$ を示せば，
$BD:DC=BE:ED$ が示せて，
さらに相似図形の性質から $BD:DC=BA:AC$ が証明できる.

〇===メニューに戻る