== 置き換えによる展開 ==

■問題　次の式を展開せよ.

…　♪♪浴びるほどやって得意ワザに入れる感じで♪♪

[採点する] [やり直す]

(1)　$(a-2b+3c)^2$

$=a^2+\square b^2+\square c^2-\square ab-\square bc+\square ca$ ×××××

(2)　$(x+y+1)(x+y-2)$

$=x^2+y^2+\square xy-x-y-\square$ ××

(3)　$(a-2b+3c)(a+2b+3c)$

$=a^2-\square b^2+\square c^2+\square ac$ ×××

(4)　$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x\square+x\square y\square+y\square$

××××

(5)　$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$

$=x^4+\square x^3+\square x^2-\square x-\square$ ××××

(6)　$(x^3-x^2+x-1)(x^3+x^2-x+1)$

$=x^6-x^4+\square x^3-\square x^2+\square x-\square$ ××××

(1) 準公式を利用

$a^2+(2b)^2+(3c)^2-2a(2b)-2(2b)(3c)+2(3c)a$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca$

(2) $x+y=A$ と考えると

$\{(x+y)+1\}\{(x+y)-2\}$

$=(x+y)^2-(x+y)-2=x^2+2xy+y^2-x-y-2$

(3) $a+3c=A$ と考えると

$\{(a+3c)-2b\}\{(a+3c)+2b\}$

$=(a+3c)^2-(2b)^2=a^2+6ac+9c^2-4b^2$

(4) $x^2+y^2=A$ と考えると

$\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=x^4+x^2y^2+y^4$

(5) $x^2+4x=A$ と考えると

$\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}$

$=\{(x^2+4x)-5\}\{(x^2+4x)+3\}$

$=(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$

$=x^4+8x^3+16x^2-2x^2-8x-15$

$=x^4+8x^3+14x^2-8x-15$

(6) $x^2-x+1=A$ と考えると

$\{x^3-(x^2-x+1)\}\{x^3+(x^2-x+1)\}$

$=x^6-(x^2-x+1)^2$

$=x^6-(x^4+x^2+1-2x^3-2x+2x^2)$

$=x^6-x^4+2x^3-3x^2+2x-1$

(1) 2011.4.24--2012.10.1の期間に寄せられた答案388件について（以下の問題についても同様）

≪正答率≫　この問題の正答率は各々90%～80%で，よくできています.

≪主な誤答≫　ab, bc, ca の係数を公式のまま2にしている答案が少しありました. この問題に則して-2, 3 を使った係数に直す必要があります.

(2) ≪正答率≫　この問題の正答率は84%で，よくできています.

≪主な誤答≫　特に多い誤答はありませんでした.

(3) ≪正答率≫　この問題の正答率は80%～74%で，よくできています.

≪主な誤答≫　特に多い誤答はありませんでした.

(4) ≪正答率≫　この問題の正答率は79%～74%で，よくできています.

≪主な誤答≫　特に多い誤答はありませんが，白紙答案が増えています.

(5) ≪正答率≫　この問題の正答率は72%～69%で，よくできています.

≪主な誤答≫　特に多い誤答はありませんが，白紙答案が20%以上ありました.

(6) ≪正答率≫　この問題の正答率は66%～50%で，やや下がっています.

≪主な誤答≫　特に多い誤答はありませんが，白紙答案が30%以上ありました.

■解説

○　置き換えによる展開とは

同じ式が2回以上登場するとき，これらに名前を付けて1文字で表わすと，「見やすく」「間違いにくく」なる. ここでは2回以上登場する式を1文字で置き換えて展開の計算を行うことを考える.

例1

$(a+b+c)^2$ のように3つ以上からなる項の2乗は，教科書の基本公式にないからと言って，$(a+b+c)(a+b+c)$ に直して「総当たり」で展開していると大変

これを $a+b=A$ と置き換えると，$(A+c)^2$ になり展開公式が使えて，

$(a+b+c)^2$

$=(A+c)^2$

$=A^2+2Ac+c^2$

元に戻すと

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$　形を整えると

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

※　置き換えに用いた文字 A は自分が付けた名前なので（他の人は別の名前をつけてもよいので），

$(a+b+c)^2=A^2+2Ac+c^2$

「総当たりで」展開してもできないことはないが

次のような問題が幾つも登場すると困ってしまう･･･

$(a-b+c)^2$, $(a-b-c)^2$, $(x^2+x+2)^2$, $(x^2-2x+5)^2$ …

実は，次の展開はかなりよく登場するので「準公式」として覚えてしまうことが多い.

【準公式】　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

この立場に立つと，以下の問題は直ちに解決する.

・$(a-b+c)^2=a^2+(-b)^2+c^2+2\cdot a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot c+2ca$

$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

・$(a+b-c)^2$

上の変形を見ていると知恵がついてきて，直ちに分かるようになる（符号と係数を変えるだけ）

$=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

・$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

・$(x^2+2x+3)^2=x^4+4x^2+9+4x^3+12x+6x^2$

を答にしてはいけない.

※ 慣れてくると，置き換える文字の代わりに （ ） を使って次のように変形することもできるが，「どれがよい」ということはない.「自分に分かりやすい＝間違いにくい」と思う方法でやればよい.

$(a+b+c)^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

※ 計算が多いので，1題解くだけなら「力まかせ・総当たり・単純計算主義」でバラバラにした方が速いと考える人がいるかもしれない. しかし，何題も解くときは，やはり置き換え方式が有利. さらに，バラバラにする方式では，展開の逆=因数分解（右辺を左辺に戻す）のときに見通しが立たなくなる.

例2

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ のように一見同じものがないように見える式でも（ x を A に置き換えても無駄 ）工夫次第で同じ式が作れることがある.

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$ のように組み合わせると，

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$ になるので，$x^2+5x=A$ とおけば簡単に展開できる.

$=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$

結果のまとめ方：左の例のように

$a \to b \to c \to (a)$

のサイクルにして書くことが多い. それ以外はダメだいうことではないが，一定の規則で並べると「書く人も・読む人も」「見やすく・間違いにくい」.

しりとりで一周させて

♪～「こぶた」→「たぬき」→「きっね」→「ねこ」

の順に並べるということ.

（2次と1次）の組を考える例

$(x+1)(x+3)(x-5)(x-7) \to x^2-4x=A$ とおくと

$(A-5)(A-21)$ になり $A^2-26A+105$

（2次と定数項）の組を考える例

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6) \to x^2+6=A$ とおくと

$(A+7x)(A+5x)$ になり $A^2+12xA+35x^2$

【要点】

2回以上登場する式は，1文字に置き換えると「見やすく＝間違いにくく」なる.

例1　$(a+b+c)^2 \to a+b=A$ と置き換える. または $\{(a+b)+c\}^2$ とする.

例2　$(a+b+c)(a-b+c) \to a+c=A$ と置き換える. または $\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}$ とする.

例3　$(a+b+c+d)(a+b-c-d) \to a+b=A$, $c+d=B$ と置き換える. または $\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}$ とする.

なお，次の変形はかなりよく登場するので，準公式などとして覚えてしまうことが多い.

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$