== 2次関数のグラフと直線 ==

【例1】

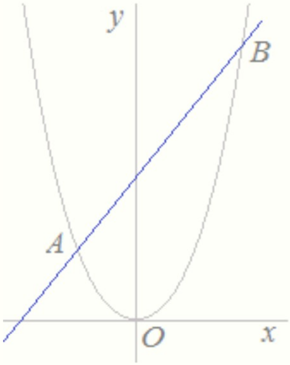
$y=x^2$ のグラフ上に2点A，Bがあります．A，Bの x 座標がそれぞれ $-1, 3$ であるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　2点A，Bの座標を求めなさい．

(2)　2点A，Bを通る直線の方程式を求めなさい．

(3)　2点A，Bを通る直線が y 軸と交わる点Pの座標を求めなさい．

(4)　△POBの面積を求めなさい．



（解答）

(1)

$x=-1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=(-1)^2=1$ となるから，点Aの座標は $(-1, 1)$ …（答）

$x=3$ を $y=x^2$ に代入すると $y=3^2=9$ となるから，点Bの座標は $(3, 9)$ …（答）

(2)

求める直線の方程式を $y=ax+b$ …(A)とおくと，

点A $(-1, 1)$ がこの直線上にあるから，

$1=-a+b$ …(B)

また，点B $(3, 9)$ がこの直線上にあるから，

$9=3a+b$ …(C)

(B)(C)を係数 a, b を求めるための連立方程式として解く．

$1=-a+b$ …(B)

$-)\ 9=\ 3a+b$ …(C)

$-8=-4a$

$a=2$ …(D)

(D)を(B)に代入

$b=3$

(A)にこれら a, b の値を代入すると

$y=2x+3$ …（答）

(3)

$y=2x+3$ の方程式に $x=0$ に代入すると $y=3$ となるから，点Pの座標は $(0, 3)$ …（答）

(4)

△POBにおいて PO を底辺と見ると，底辺の長さは 3．このとき，高さはBの x 座標 3 になるから，△POBの面積は

（底辺）×（高さ）÷ $2=\frac{9}{2}$ …（答）

【問1】

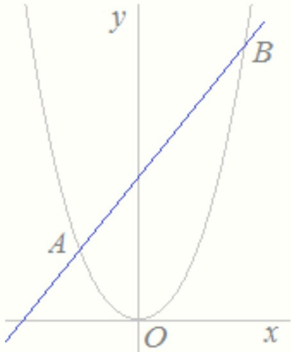
$y=2x^2$ のグラフ上に2点A，Bがあります．A，Bの x 座標がそれぞれ $-1, 2$ であるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　2点A，Bの座標を求めなさい．

(2)　2点A，Bを通る直線の方程式を求めなさい．

(3)　2点A，Bを通る直線が y 軸と交わる点Pの座標を求めなさい．

(4)　△AOPの面積を求めなさい．



（解答）*** 以下の問題で，Tabキーを押せば空欄を順に移ることができます．***

(1)

$x=-1$ を $y=2x^2$ に代入して y 座標を求める．

点Aの座標は(-1 , 2) ○ ○

$x=2$ を $y=2x^2$ に代入して y 座標を求める．

点Bの座標は(2 , 8) ○ ○

採点する　やり直す　help

(2)

求める直線の方程式を $y=ax+b$ とおいて，上で求めたA，Bの座標 x, y を代入し，a, b の連立方程式を作る．
これを解くと直線の方程式が定まる．

$y=$ 2 $x+$ 4 ○ ○

採点する　やり直す　help

(3)

上で得られた直線の方程式に $x=0$ を代入すると点Pの y 座標が得られる．

点Pの座標は(0 , 4) ○ ○

採点する　やり直す　help

(4)

△AOPにおいて PO を底辺と見ると，高さはAの x 座標の絶対値（符号を正に変えたもの）になるから，△AOPの面積は

（底辺）×（高さ）÷ $2=$ 2 ○

採点する　やり直す　help

(1) A $(-1, 2)$，B $(2, 8)$

(2) $2=-a+b$

$-)\ 8=\ 2a+b$

$-6=-3a$

$a=2$

$b=4$

したがって $y=2x+4$

(3) $y=2x+4$ に $x=0$ を代入すると $y=4$

P $(0, 4)$

(4) 底辺は $PO=4$，高さはAの x 座標 -1 の符号を正に変えて 1

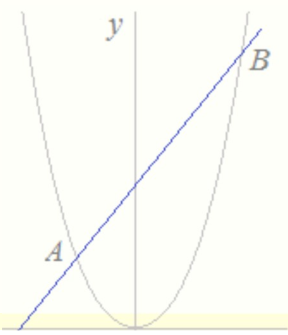
△AOP $=4\times1\div2=2$

【例2】

右図のように2次関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=x+b$ のグラフが2点A，Bで交わり，点Aの座標が $(-2, 2)$ であるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　定数 a の値を求めなさい．

(2)　定数 b の値を求めなさい．

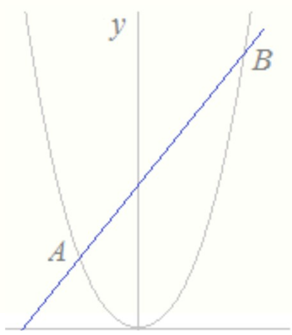


【問2】

右図のように2次関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=bx+3$ のグラフが2点A，Bで交わり，点Aの座標が $(-2, 2)$ であるとき，次の問いに答えなさい．

(1)　定数 a の値を求めなさい．

(2)　定数 b の値を求めなさい．



(3) 点Bの座標を求めなさい.

(4) △AOBの面積を求めなさい.

（解答）

(1)

点Aの座標 $x=-2,\ y=2$ を方程式 $y=ax^2$ に代入すると

$2=a\times(-2)^2=4a$ より, $a=\frac{1}{2}$ …（答）

(2)

点Aの座標 $x=-2,\ y=2$ を方程式 $y=x+b$ に代入すると,

$2=-2+b$

$b=4$ …（答）

(3)

A, Bは $y=\frac{1}{2}x^2$ …(A)と $y=x+4$ …(B)の交点だから,

(A)(B)を連立方程式として解くと座標が求まる.

$y=\frac{1}{2}x^2$ …(A)

$y=x+4$ …(B)

(A)(B)から y を消去すると

$\frac{1}{2}x^2=x+4$

$x^2=2x+8$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$

$x=-2,\ 4$

図より $x=-2$ が点Aの x 座標, $x=4$ が点Bの x 座標を表している.

点Bの y 座標は $x=4$ を(B)に代入すれば求まる.

$(4,\ 8)$ …（答）

(4)

直線(B)と y 軸との交点をPとすると, △AOB＝△AOP+△POB

PO を底辺と見ると, 底辺の長さは 4. このとき, △AOPの高さはAの x 座標 -2 の符号を正に変えて 2

△AOP $=4\times2\div2=4$

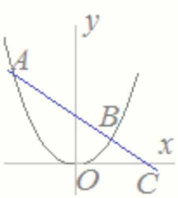
△POBの高さはBの x 座標 4

△POB $=4\times4\div2=8$

△AOB＝△AOP+△POB $=4+8=12$ …（答）

【例3】

右図のように2次関数 $y=x^2$ のグラフと直線のグラフが2点 A, B で交わり, 点 A, B の x 座標がそれぞれ $-2,\ 1$ であるとき, 次の問いに答えなさい.



(1) 2点 A, B の座標を求めなさい.

(2) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.

(3) 2点 A, B を通る直線が x 軸と交わる点を C とするとき点 C の座標を求めなさい.

(4) △ BOC の面積を求めなさい.

（解答）

(3) 点Bの座標を求めなさい.

(4) △AOBの面積を求めなさい.

（解答）

(1)

$x=-2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して a を求める.

$a=\frac{1}{2}$ ○ ○

採点する　やり直す　help

(2)

$x=-2,\ y=2$ を $y=bx+3$ に代入して b を求める.

$b=\frac{1}{2}$ ○ ○

採点する　やり直す　help

(3)

(1)(2)から2次関数と直線の方程式が決まるので, それらを連立方程式として解くと交点の座標が求まる. 2つの解のうちで $x>0$ となる値がBの x 座標になる.

点Bの座標は(3 , $\frac{9}{2}$) ○ ○ ○

採点する　やり直す　help

(4)

直線と y 軸との交点をPとすると, △AOBを2つの三角形△AOP, △POBに分けて求める.

△AOB = $\frac{15}{2}$ ○ ○

採点する　やり直す　help

(1) $x=-2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入すると

$a=\frac{1}{2}$

(2) $x=-2,\ y=2$ を $y=bx+3$ に代入すると

$b=\frac{1}{2}$

(3)

連立方程式 $y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\frac{1}{2}x+3$ を解く. y を代入して消去すると

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+3 \rightarrow x^2=x+6 \rightarrow x^2-x-6=0$

$\rightarrow (x+2)(x-3)=0 \rightarrow x=-2$（点A）, $x=3$（点B）

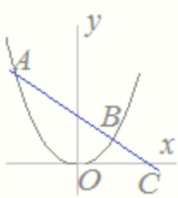
点Bの y 座標は, これをどちらかの方程式に代入すれば得られる.

点Bの座標は $(3,\ \frac{9}{2})$

(4) △AOP+△POB $=2\times3\div+3\times3\div2=\frac{15}{2}$

【問3】

右図のように2次関数 $y=x^2$ のグラフと直線のグラフが2点 A, B で交わり, 点 A, B の x 座標がそれぞれ $-4,\ 2$ であるとき, 次の問いに答えなさい.



(1) 2点 A, B の座標を求めなさい.

(2) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.

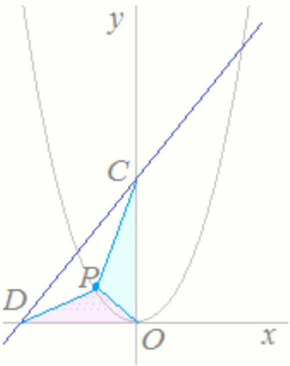
(3) 2点 A, B を通る直線が x 軸と交わる点を C とするとき点 C の座標を求めなさい.

(4) △ BOC の面積を求めなさい.

（解答）

(1)
$x=-2$ を方程式 $y=x^2$ に代入すると $y=4$
$x=1$ を方程式 $y=x^2$ に代入すると $y=1$
点 A の座標は $(-2, 4)$，点 B の座標は $(1, 1)$ …（答）
(2)
求める直線の方程式を $y=ax+b$ …(A)とおくと，
点 A $(-2, 4)$ がこの直線上にあるから，
$4=-2a+b$ …(B)
また，点 B $(1, 1)$ がこの直線上にあるから，
$1=a+b$ …(C)
(B)(C)を係数 a, b を求めるための連立方程式として解く．
$4=-2a+b$ …(B)
$-)\ 1=\ a+b$ …(C)
$3=-3a$
$a=-1$ …(D)
(D)を(B)に代入
$b=2$
(A)にこれら a, b の値を代入すると
$y=-x+2$ …（答）
(3)
$y=-x+2$ の y 座標が 0 となるときの x の値を求めると
$-x+2=0$ より $x=2$
点 C の座標は $(2, 0)$ …（答）
(4)
△ BOC の底辺を OC とすると $OC=2$
このとき高さは B の y 座標 1
△ $BOC=2\times1\div2=1$ …（答）

【例4】
右図のように2次関数 $y=x^2$ のグラフと直線 $y=x+2$ のグラフが x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ D，C とするとき，次の問いに答えなさい．



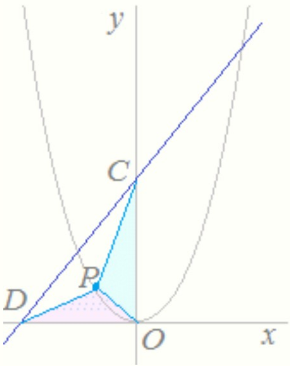
(1)　点 C，D の座標を求めなさい．
(2)　点 P は2次関数 $y=x^2$ のグラフ上で $x<0$ の部分を動くものとする．△ PDO の面積が△ CPO の面積の2倍となるとき，点 P の x 座標を求めなさい．

（解答）
(1)
$y=x+2$ に $x=0$ を代入すると $y=2$
$y=x+2$ に $y=0$ を代入すると $x=-2$
点 C の座標は $(0, 2)$，点 D の座標は $(-2, 0)$ …（答）
(2)
$P(x, x^2)$ とおく．
△ PDO について底辺を $DO=2$ とすると，高さは P の y 座標 x^2 になるから，面積は $2\times x^2\div2=x^2$
△ CPO について底辺を $CO=2$ とすると，高さは P の x 座標 $x(<0)$ の符号を変えたものになるから，面積は
$2\times(-x)\div2=-x$
$x^2=2(-x)$
$x(x+2)=0\ (x<0)$

(1)
$x=-4$，$x=2$ を方程式 $y=x^2$ に代入するとそれぞれの y 座標が求まる．
点 A の座標は（-4, 16） ○ ○
点 B の座標は（2, 4） ○ ○
採点する やり直す help
(2)
求める直線の方程式を $y=ax+b$ とおいて a, b を求める．
$y=$ -2 $x+$ 8 ○ ○
採点する やり直す help
(3)
(2)で求めた直線の方程式で $y=0$ となる x の値を求める．
点 C の座標は(4, 0) ○ ○
採点する やり直す help
(4)
△ BOC の底辺を OC，高さを B の y 座標と考えると
△ $BOC=$ 8 ○
採点する やり直す help

(1) $A(-4, 16), B(2, 4)$
(2) $y=-2x+8$
(3) $C(4, 0)$
(4) $4\times4\div2=8$

【問4】
右図のように2次関数 $y=2x^2$ のグラフと直線 $y=2x+4$ のグラフが x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ D，C とするとき，次の問いに答えなさい．



(1)　点 C，D の座標を求めなさい．
(2)　点 P は2次関数 $y=2x^2$ のグラフ上で $x<0$ の部分を動くものとする．△ PDO の面積が△ CPO の面積と等しくなるとき，点 P の x 座標を求めなさい．

（解答）
(1)
点 C の座標は（0, 4） ○ ○
点 D の座標は（-2, 0） ○ ○
採点する やり直す help
(2)
$x=$ -1 ○
採点する やり直す help

(1) 直線の方程式 $y=2x+4$ に $x=0$ を代入すれば点 C の y 座標が求まる．→ $y=4$
直線の方程式 $y=2x+4$ に $y=0$ を代入すれば点 D の x 座標が求まる．→ $0=2x+4$ より $x=-2$

$x<0$ だから $x=-2$ …（答）

$C(0, 4), D(-2, 0)$

(2)　点 P の座標を (x, x^2) とおく.，△ PDO の底辺を $DO=2$ にとると,高さは P の y 座標 $2x^2$ になる.

$$\triangle PDO=2\times 2x^2\div 2=2x^2$$

△ CPO の底辺を $CO=4$ にとると,高さは P の x 座標の符号を変えたもの $-x$ になる.

$$\triangle CPO=4\times(-x)\div 2=-2x$$

これらが等しいのだから $2x^2=-2x$

$$2x^2+2x=0$$
$$2x(x+1)=0$$
$$x=-1\ (<0)$$