== 面積の比 ==

○1　2つの三角形の高さが等しいときは，面積の比は底辺の長さの比に等しい．

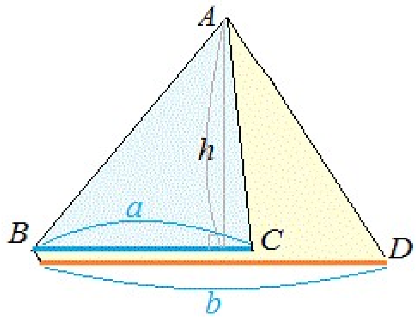


図1

三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ の面積は各々

$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot h}{2}$$
$$\triangle ABD = \frac{BD \cdot h}{2}$$

※　辺BC の長さをBC と書く．文字式の計算としてB とC を掛けているわけではない．BD も辺の長さを表す記号．
※　式の中で$\triangle ABC$ と書いたときは$\triangle ABC$ の面積を表す．

ここで $BC:BD=a:b$ ならば

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \frac{BC \cdot h}{2} : \frac{BD \cdot h}{2} = BC:BD = a:b$$

となって，$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ との面積比は底辺の長さの比に等しくなる．

例1
右図2において$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ の高さは等しいから，

$\triangle ABC : \triangle ABD = 2:3$
$\triangle ABC : \triangle ACD = 2:1$

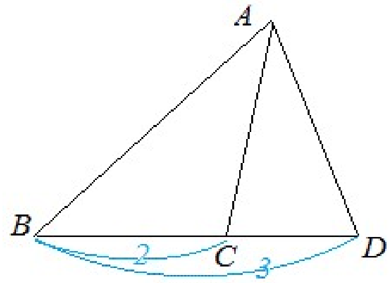


図2

○2　2つの三角形の底辺の長さが等しいときは，面積の比は高さの比に等しい．
○3　高さが書いていないときでも，1組の辺の比が$m:n$ のときは，高さが$m:n$ と考えてよい．

○2の証明
三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の$\triangle FBC$ と$\triangle ABC$ の面積は各々

$$\triangle FBC = \frac{BC \cdot FD}{2}$$
$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot AE}{2}$$

ここで底辺 BC は共通だから

$$\triangle FBC : \triangle ABC = \frac{BC \cdot FD}{2} : \frac{BC \cdot AE}{2} = FD : AE$$

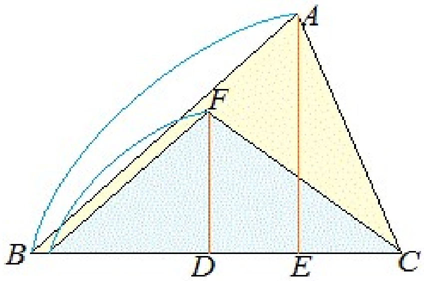


図3

○3の証明
右図3の$\triangle FBD$ と$\triangle ABE$ は相似図形だから，

$FD:AE=FB:AB$
したがって $\triangle FBC : \triangle ABC = FD : AE = FB : AB$

（○3は，FB とAB を底辺と考えると○1と同じ内容になる．）

例2
右図4において$\triangle DBC$ と$\triangle ABC$ の底辺BC は共通だから，

$\triangle DBC : \triangle ABC = 3:5$
$\triangle DBC : \triangle ADC = 3:2$

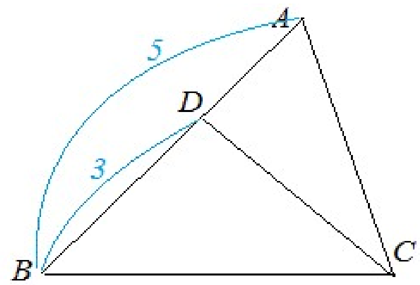


図4

○4　2つの三角形の底辺の比が$a:b$ ，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．
○5　右図6のように2つの三角形で1つの角が共通のとき，この角をはさむ2辺の比が各々$a:b$ ，$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．

○4の証明

$$\triangle DBE = \frac{BE \cdot DF}{2}$$
$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot AG}{2}$$

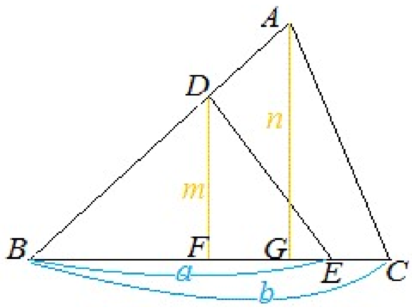


図5

だから $\triangle DBE:\triangle ABC=\frac{am}{2}:\frac{bn}{2}=am:bn$

○5の証明
右図6においては○3と同様に高さの比が$m:n$ になるから,
$\triangle DBE:\triangle ABC=am:bn$

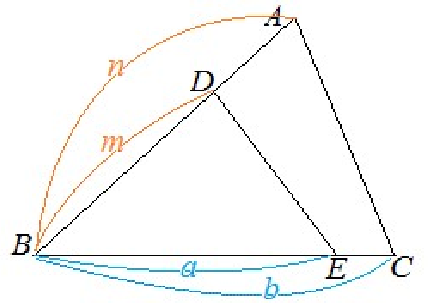


図6

例3
右図7において

$\triangle DBE:\triangle ABC=8:15$
$\triangle DBE$:(四角形)$ADEC=8:(15\text{-}8)=8:7$

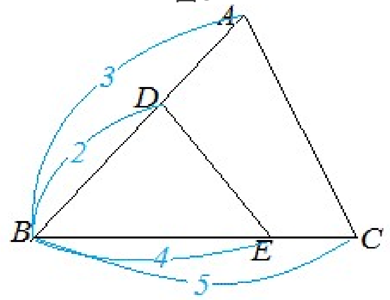


図7

○6 相似比が$a:b$ となる2つの三角形の面積の比は$a^2:b^2$ になる.

○6の証明
○5において底辺の比も高さの比も$a:b$ になるから,
$\triangle DBE:\triangle ABC=aa:bb=a^2:b^2$

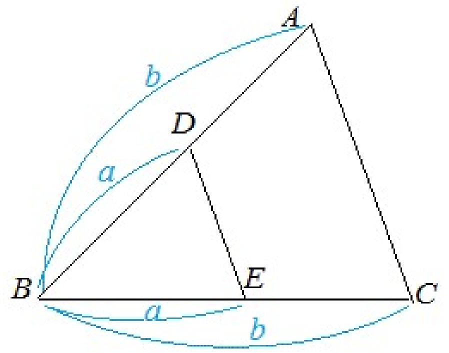
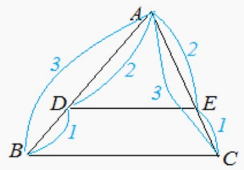


図8

例4
右図において
$\triangle ADE:\triangle ABC=4:9$
$\triangle ADE$:(四角形)$DBCE=4:(9\text{-}4)=4:5$



【まとめ】
(1) 右図9ののように2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる.（右の図9では高さの比を$m:n$ と読む.）

(2) 右図10のような図形において，3つ以上の三角形の面積を比較するときは，次のように「比の値」を「分数」にすると簡単にできる.

$$\frac{\triangle BEP}{\triangle CEP}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\triangle CEP}{\triangle CAP}=\frac{4}{5}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle BEP}{\cancel{\triangle CEP}}\frac{\cancel{\triangle CEP}}{\triangle CAP}=\frac{2}{3}\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$\triangle BEP:\triangle CAP=8:15$

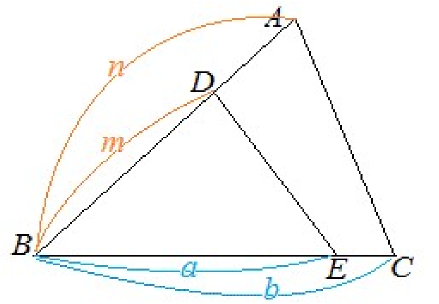


図9

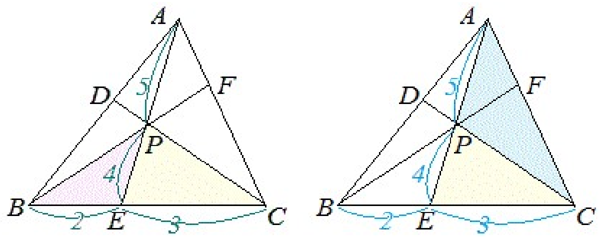
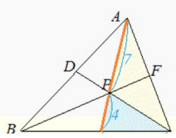
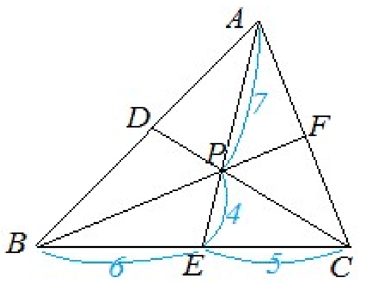
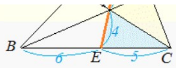


図10

例題1
右図11において
(1) $\triangle BEP:\triangle CEP=6:5$
高さが等しく，底辺が6:5と見る
(2) $\triangle ABC:\triangle PBC=11:4$
底辺が等しく，高さが11:4と見る
(3) $\triangle APC:\triangle PEC=7:4$
右図のようにAP，PE を底辺とみると，高さが等しく，底辺が7:4







(4) $\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

$\dfrac{\triangle APB}{\triangle BPE}=\dfrac{7}{4}$

$\dfrac{\triangle BPE}{\triangle BPC}=\dfrac{6}{11}$

ゆえに

$\dfrac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPE}}\dfrac{\cancel{\triangle BPE}}{\triangle BPC}=\dfrac{7}{4}\dfrac{6}{11}=\dfrac{42}{44}=\dfrac{21}{22}$

$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

図11

例題2

右図12において

(1) $\triangle APB:\triangle BPC=4:5$

高さが等しく，底辺が4:5と見る

(2) $\triangle BPC:\triangle CPD=3:7$

高さが等しく，底辺が3:7と見る

(3) $\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

$\dfrac{\triangle APB}{\triangle BPC}=\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{\triangle BPC}{\triangle CPD}=\dfrac{3}{7}$

ゆえに

$\dfrac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPC}}\dfrac{\cancel{\triangle BPC}}{\triangle CPD}=\dfrac{4}{5}\dfrac{3}{7}=\dfrac{12}{35}$

$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

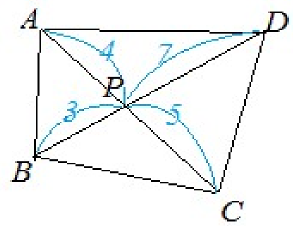


図12

例題3

右図13の平行四辺形$ABCD$ において

(1) $\triangle ABQ \backsim \triangle FDQ$（相似比は9:3=3:1）だから

$\triangle ABQ:\triangle FDQ=3^2:1^2=9:1$

$\triangle ABP:\triangle ABQ=4:9$（高さが等しく底辺が4:9）

ゆえに $\triangle ABP:\triangle FDQ=4:1$

(2) $\triangle BEP \backsim \triangle ADP$（相似比は4:8=1:2）だから

$\triangle BEP:\triangle ADP=1:4$

$\triangle APQ:\triangle APD=5:8$（高さが等しく底辺が5:8）

ゆえに

$\triangle BEP:\triangle APQ=\dfrac{1}{4}:\dfrac{5}{8}=2:5$

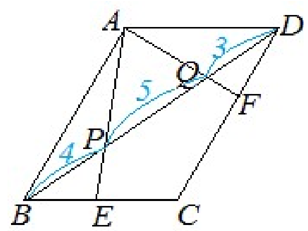


図13

例題4

右図14の平行四辺形$ABCD$ において

(1)

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$（相似比は $AP:PC=2:7$）

$EP:PB=2:7$

$\triangle APE$ と$\triangle APB$ は高さが等しく底辺が $2:7$

$\triangle APE:\triangle APB=2:7$

(2)

$\dfrac{\triangle APE}{\triangle CPB}=\dfrac{4}{49}$ ← 相似比2:7の相似図形

$\dfrac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\dfrac{7}{4}$ ← 高さが等しく底辺が7:4

ゆえに

$\dfrac{\triangle APE}{\triangle CPB}\dfrac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\dfrac{4}{49}\dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{7}$

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

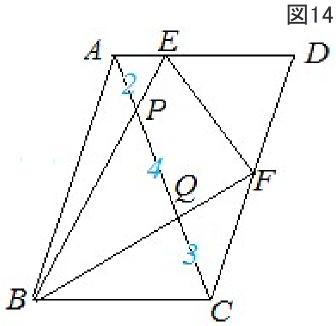
(3)

$\triangle BQA \backsim \triangle FQC$

だから $BQ:QF=AQ:QC=6:3=2:1$

$\triangle CQB$ と$\triangle FQC$ は高さが等しく底辺が $2:1$

図14



(2)の別解

$\dfrac{\triangle APE}{\triangle APB}=\dfrac{2}{7}$ ←(1)の結果

$\dfrac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ← 高さが等しく底辺が2:4

ゆえに

$\dfrac{\triangle APE}{\triangle APB}\dfrac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{7}$

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

(4)の証明

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$ だから

$AE:CB=AP:CP=2:7$

$AE:DA=2:7$（←平行四辺形だから）

$AE:ED=2:5$

$\triangle AQB \backsim \triangle CQF$ だから

$\triangle CQB : \triangle FQC = 2:1$

(4)

$\triangle CQF : \triangle FED = 7:15$

(5)

$\triangle BQP : \triangle DEF = 56:45$

(5)の証明

$\frac{\triangle BQP}{\triangle ABC} = \frac{4}{9}$ ←【まとめ】

$\frac{\triangle DAC}{\triangle DEF} = \frac{14}{5}$ ←【まとめ】

$AP:PC=2:7$ だから$AE:BC=2:7$
したがって$AE:ED=2:5$
$AQ:QC=6:3$ だから$AB:CF=6:3$
したがって$CD:CF=6:3$，$CF:FD=3:3=1:1$

$\triangle ABC = \triangle CAD$ ←平行四辺形だから

ゆえに

$$\frac{\triangle BQP}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle DEF} = \frac{4}{9}\ \frac{14}{5} = \frac{56}{45}$$

問題1

右図の$\triangle ABC$ において

(1) $\triangle BEP : \triangle CEP =$ 7 : 4 ○○

採点する やり直す 解説

(2) $\triangle ABC : \triangle PBC =$ 5 : 2 ○○

採点する やり直す 解説

(3) $\triangle APC : \triangle PEC =$ 3 : 2 ○○

採点する やり直す 解説

(4) $\triangle BCP : \triangle CAP =$ 11 : 6 ○○

採点する やり直す 解説

【答案の傾向】
(4) ≪正答率≫⇒25%でほとんどの人が間違いました.
≪主な誤答≫⇒白紙答案が24%ありました.
≪ここがポイント≫⇒$\triangle BCP$ と$\triangle CAP$ を直接比較するのが難しいので，それぞれを第3の三角形$\triangle PEC$ などと比較します.

問題2

右図の四角形$ABCD$ において対角線 AC，BD の交点を P とする. $AP:PC=1:5$，$BP:PD=4:3$ のとき次の面積比を求めなさい.

(1) $\triangle APB : \triangle CPD =$ 4 : 15 ○○

採点する やり直す 解説

(2) $\triangle APD : \triangle CPB =$ 3 : 20 ○○

採点する やり直す 解説

【答案の傾向】
(2) ≪正答率≫⇒59%と少しよくなりました.
≪主な誤答≫⇒$1:5$ という答案が10%ありました.
≪ここがポイント≫⇒$\triangle APD$ と$\triangle CPB$ を直接比較するのが難しいので，それぞれを第3の三角形$\triangle CPD$ などと比較します.

$AB:CF=AQ:QC=6:3=2:1$
$DC:CF=2:1$（←平行四辺形だから）
$CF:FD=1:1$

$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD} = \frac{3}{18}$ ←【まとめ】

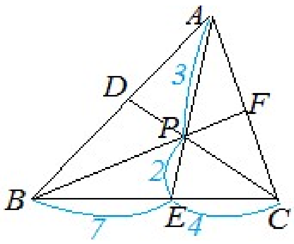
$\frac{\triangle CAD}{\triangle FED} = \frac{14}{5}$ ←【まとめ】

ゆえに

$$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle FED} = \frac{3}{18}\ \frac{14}{5} = \frac{7}{15}$$

だから

$\triangle CQF : \triangle FED = 7:15$



(1) $\triangle BEP$ と$\triangle CEP$ は高さが等しく，底辺が$7:4$ だから
$\triangle BEP:\ \triangle CEP=7:4$
(2) $\triangle ABC$ と$\triangle PBC$ は底辺が等しく，高さが$5:2$ だから
$\triangle ABC:\ \triangle PBC=5:2$
(3) $\triangle APC$ と$\triangle PEC$ の底辺を各々AP，PE と見ると，高さが等しく，底辺が$3:2$ だから
$\triangle APC:\ \triangle PEC=3:2$
(4)

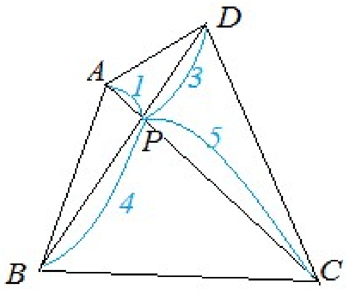
$\frac{\triangle BCP}{\triangle ECP} = \frac{11}{4}$

$\frac{\triangle ECP}{\triangle CAP} = \frac{2}{3}$

ゆえに

$$\frac{\triangle BCP}{\cancel{\triangle ECP}}\frac{\cancel{\triangle ECP}}{\triangle CAP} = \frac{11}{4}\ \frac{2}{3} = \frac{22}{12} = \frac{11}{3}$$

$\triangle BCP:\triangle CAP=11:6$



(1) $\triangle APB:\triangle APD=4:3$

$\frac{\triangle APB}{\triangle APD} = \frac{4}{3}$

$\triangle APD:\triangle CPD=1:5$

$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD} = \frac{1}{5}$

$\frac{\triangle APB}{\triangle APD}\frac{\triangle APD}{\triangle CPD} = \frac{4}{3}\ \frac{1}{5}$

$\frac{\triangle APB}{\triangle CPD} = \frac{4}{15}$

(2) $\triangle APD:\triangle CPD=1:5$

$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD} = \frac{1}{5}$

$\triangle CPD:\triangle CPB=3:4$

$\frac{\triangle CPD}{\triangle CPB} = \frac{3}{4}$

$\frac{\triangle APD}{\triangle CPD}\frac{\triangle CPD}{\triangle CPB} = \frac{1}{5}\ \frac{3}{4}$

$\frac{\triangle APD}{\triangle CPB} = \frac{3}{20}$

問題3

右図の平行四辺形$ABCD$ において対角線 AC を $4:5:6$ に分ける点を順に P , Q とするとき，次の面積比を求めなさい．

(1) $\triangle EPA : \triangle DPC=$ 16 : 121 ○○

採点する やり直す 解説

(2) $\triangle EPA : \triangle DPQ=$ 16 : 55 ○○

採点する やり直す 解説

(3) $\triangle CQF : \triangle PQD=$ 4 : 5 ○○

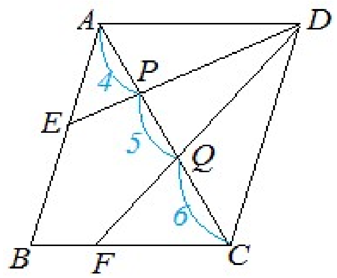
採点する やり直す 解説

【答案の傾向】

(3) ≪正答率≫⇒37%で半分以上の人が間違いました．

≪主な誤答≫⇒$36:45$ という答案が8%ありました．

≪ここがポイント≫⇒直接比較するのは難しいので，各々の三角形を第3の三角形$\triangle AQD$ と比較します．（ここまで順に解いてくれば，類推で分かると期待しましたが，形が似ていないと類推が働かないのかもしれません）



(1) $\triangle EPA \backsim \triangle DPC$ で相似比が $4:11$ だから面積比は

$$4^2:11^2=16:121$$

(2) (1)より

$$\frac{\triangle EPA}{\triangle DPC}=\frac{16}{121}$$

$\triangle DPC:\triangle DPQ=11:5$

$$\frac{\triangle DPC}{\triangle DPQ}=\frac{11}{5}$$

$$\frac{\triangle EPA}{\triangle DPC}\frac{\triangle DPC}{\triangle DPQ}=\frac{16}{121}\,\frac{11}{5}$$

ゆえに $\dfrac{\triangle EPA}{\triangle DPQ}=\dfrac{16}{55}$

(2)

$$\frac{\triangle CQF}{\triangle AQD}=\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$$ ← 相似比6:9の相似図形

$$\frac{\triangle AQD}{\triangle PQD}=\frac{9}{5}$$ ← 高さが等しく底辺が9:5

ゆえに

$$\frac{\triangle CQF}{\triangle AQD}\,\frac{\triangle AQD}{\triangle PQD}=\frac{4}{9}\,\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$$

だから $\triangle CQF:\triangle PQD=4:5$