== 面積の比 ==

○1　2つの三角形の高さが等しいときは，面積の比は底辺の長さの比に等しい．

三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ の面積は各々

$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot h}{2}$$
$$\triangle ABD = \frac{BD \cdot h}{2}$$

※　辺BC の長さをBC と書く．文字式の計算としてB とC を掛けているわけではない．BD も辺の長さを表す記号．
※　式の中で$\triangle ABC$ と書いたときは$\triangle ABC$ の面積を表す．

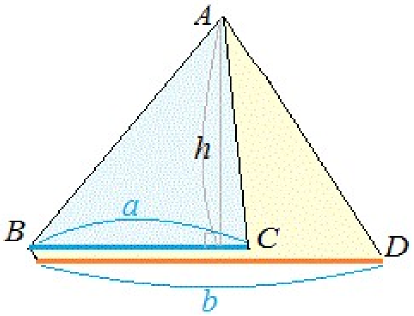


図1

ここで $BC{:}BD=a{:}b$ ならば

$$\triangle ABC : \triangle ABD = \frac{BC \cdot h}{2} : \frac{BD \cdot h}{2} = BC{:}BD = a{:}b$$

となって，$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ との面積比は底辺の長さの比に等しくなる．

例1
右図2において$\triangle ABC$ と$\triangle ABD$ の高さは等しいから，

$\triangle ABC : \triangle ABD = 2{:}3$
$\triangle ABC : \triangle ACD = 2{:}1$

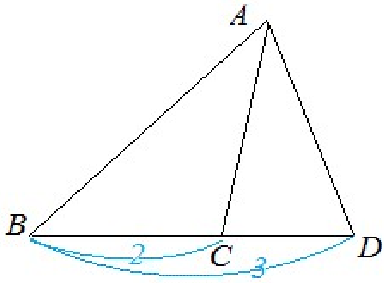


図2

○2　2つの三角形の底辺の長さが等しいときは，面積の比は高さの比に等しい．
○3　高さが書いていないときでも，1組の辺の比が$m{:}n$ のときは，高さが$m{:}n$ と考えてよい．

○2の証明
三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められる．右図の$\triangle FBC$ と$\triangle ABC$ の面積は各々

$$\triangle FBC = \frac{BC \cdot FD}{2}$$
$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot AE}{2}$$

ここで底辺 BC は共通だから

$$\triangle FBC : \triangle ABC = \frac{BC \cdot FD}{2} : \frac{BC \cdot AE}{2} = FD : AE$$

○3の証明
右図3の$\triangle FBD$ と$\triangle ABE$ は相似図形だから，

$FD{:}AE=FB{:}AB$
したがって $\triangle FBC : \triangle ABC = FD : AE = FB : AB$
（○3は，FB とAB を底辺と考えると○1と同じ内容になる．）

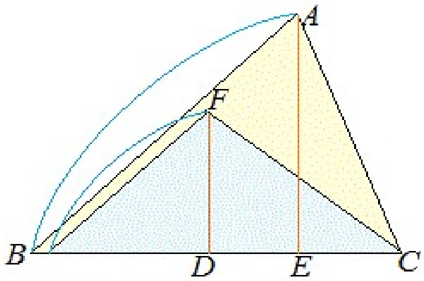


図3

例2
右図4において$\triangle DBC$ と$\triangle ABC$ の底辺BC は共通だから，

$\triangle DBC : \triangle ABC = 3{:}5$
$\triangle DBC : \triangle ADC = 3{:}2$

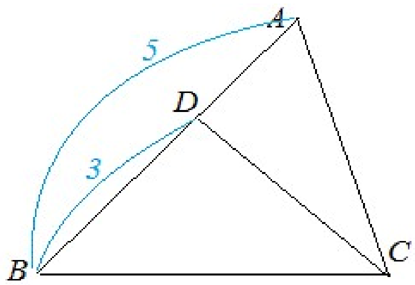


図4

○4　2つの三角形の底辺の比が$a{:}b$，高さの比が$m{:}n$ のとき，面積の比は$am{:}bn$ になる．
○5　右図6のように2つの三角形で1つの角が共通のとき，この角をはさむ2辺の比が各々$a{:}b$，$m{:}n$ のとき，面積の比は$am{:}bn$ になる．

○4の証明

$$\triangle DBE = \frac{BE \cdot DF}{2}$$
$$\triangle ABC = \frac{BC \cdot AG}{2}$$

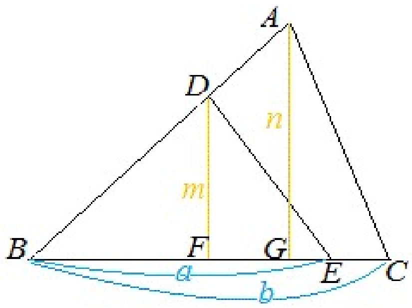


図5

だから $\triangle DBE:\triangle ABC=\dfrac{am}{2}:\dfrac{bn}{2}=am:bn$

〇5の証明
右図6においては〇3と同様に高さの比が$m:n$ になるから，
$\triangle DBE:\triangle ABC=am:bn$

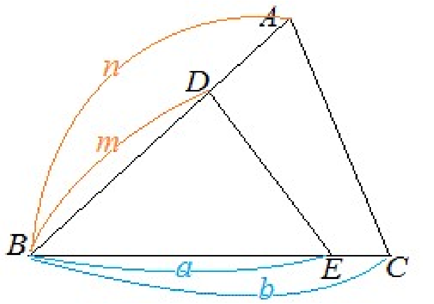


図6

例3
右図7において

$\triangle DBE:\triangle ABC=8:15$
$\triangle DBE:$(四角形)$ADEC=8:(15-8)=8:7$

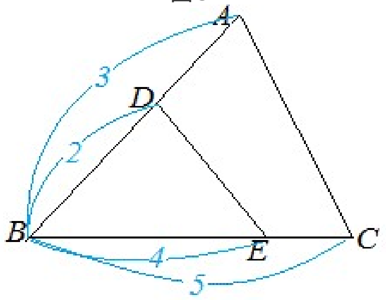


図7

〇6　相似比が$a:b$ となる2つの三角形の面積の比は$a^2:b^2$ になる．

〇6の証明
〇5において底辺の比も高さの比も$a:b$ になるから，
$\triangle DBE:\triangle ABC=aa:bb=a^2:b^2$

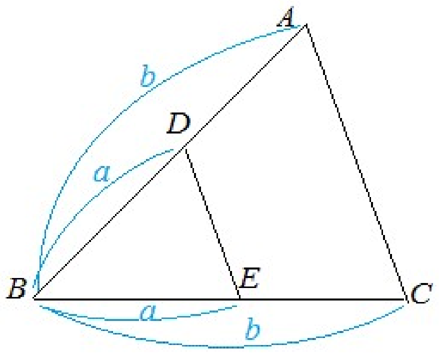
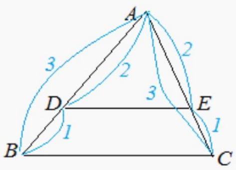


図8

例4
右図において
$\triangle ADE:\triangle ABC=4:9$
$\triangle ADE:$(四角形)$DBCE=4:(9-4)=4:5$



【まとめ】
(1) 右図9ののように2つの三角形の底辺の比が$a:b$，高さの比が$m:n$ のとき，面積の比は$am:bn$ になる．（右の図9では高さの比を$m:n$ と読む．）

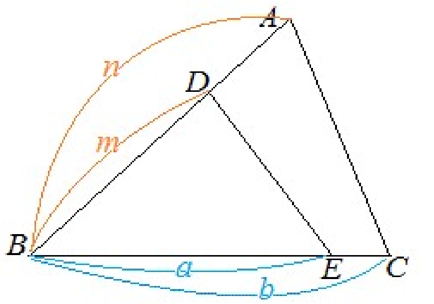


図9

(2) 右図10のような図形において，3つ以上の三角形の面積を比較するときは，次のように「比の値」を「分数」にすると簡単にできる．

$$\frac{\triangle BEP}{\triangle CEP}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\triangle CEP}{\triangle CAP}=\frac{4}{5}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle BEP}{\cancel{\triangle CEP}}\,\frac{\cancel{\triangle CEP}}{\triangle CAP}=\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$\triangle BEP:\triangle CAP=8:15$

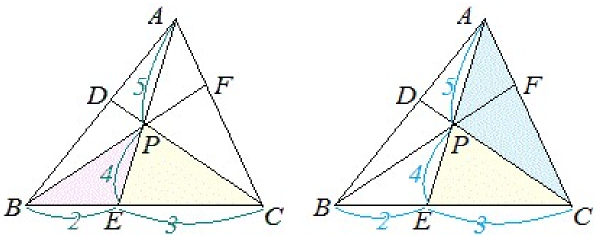
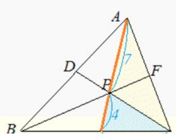
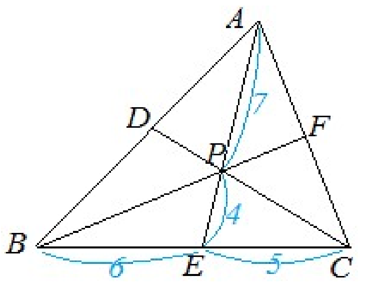


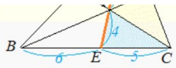
図10

例題1
右図11において
(1)　$\triangle BEP:\triangle CEP=6:5$
高さが等しく，底辺が6:5と見る
(2)　$\triangle ABC:\triangle PBC=11:4$
底辺が等しく，高さが11:4と見る
(3)　$\triangle APC:\triangle PEC=7:4$
右図のようにAP，PE を底辺とみると，高さが等しく，底辺が7:4





(4) $\triangle APB:\triangle BPC=21:22$



$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPE}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{\triangle BPE}{\triangle BPC}=\frac{6}{11}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPE}}\frac{\cancel{\triangle BPE}}{\triangle BPC}=\frac{7}{4}\ \frac{6}{11}=\frac{42}{44}=\frac{21}{22}$$

$\triangle APB:\triangle BPC=21:22$

図11

例題2

右図12において

(1) $\triangle APB:\triangle BPC=4:5$

高さが等しく，底辺が4:5と見る

(2) $\triangle BPC:\triangle CPD=3:7$

高さが等しく，底辺が3:7と見る

(3) $\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

$$\frac{\triangle APB}{\triangle BPC}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\triangle BPC}{\triangle CPD}=\frac{3}{7}$$

ゆえに

$$\frac{\triangle APB}{\cancel{\triangle BPC}}\frac{\cancel{\triangle BPC}}{\triangle CPD}=\frac{4}{5}\ \frac{3}{7}=\frac{12}{35}$$

$\triangle APB:\triangle CPD=12:35$

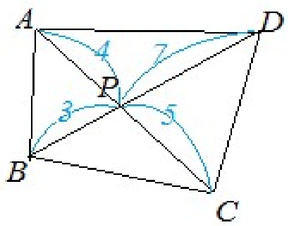


図12

例題3

右図13の平行四辺形$ABCD$ において

(1) $\triangle ABQ \backsim \triangle FDQ$（相似比は9:3=3:1）だから

$\triangle ABQ:\triangle FDQ=3^2:1^2=9:1$

$\triangle ABP:\triangle ABQ=4:9$（高さが等しく底辺が4:9）

ゆえに $\triangle ABP:\triangle FDQ=4:1$

(2) $\triangle BEP \backsim \triangle ADP$（相似比は4:8=1:2）だから

$\triangle BEP:\triangle ADP=1:4$

$\triangle APQ:\triangle APD=5:8$（高さが等しく底辺が5:8）

ゆえに

$\triangle BEP:\triangle APQ=\frac{1}{4}:\frac{5}{8}=2:5$

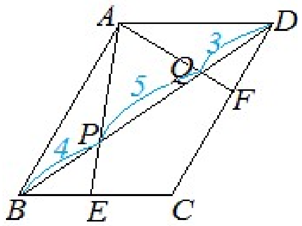


図13

例題4

右図14の平行四辺形$ABCD$ において

(1)

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$（相似比は $AP:PC=2:7$）

$EP:PB=2:7$

$\triangle APE$ と$\triangle APB$ は高さが等しく底辺が $2:7$

$\triangle APE:\triangle APB=2:7$

(2)

$$\frac{\triangle APE}{\triangle CPB}=\frac{4}{49}$$ ← 相似比2:7の相似図形

$$\frac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\frac{7}{4}$$ ← 高さが等しく底辺が7:4

ゆえに

$$\frac{\triangle APE}{\triangle CPB}\frac{\triangle CPB}{\triangle QPB}=\frac{4}{49}\ \frac{7}{4}=\frac{1}{7}$$

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

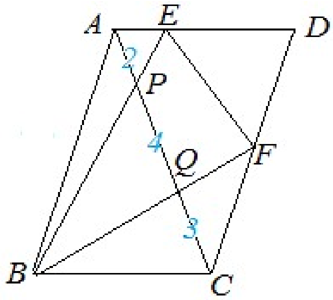
(3)

$\triangle BQA \backsim \triangle FQC$

だから $BQ:QF=AQ:QC=6:3=2:1$

$\triangle CQB$ と$\triangle FQC$ は高さが等しく底辺が $2:1$

図14



(2)の別解

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}=\frac{2}{7}$$ ←(1)の結果

$$\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ ← 高さが等しく底辺が2:4

ゆえに

$$\frac{\triangle APE}{\triangle APB}\frac{\triangle APB}{\triangle QPB}=\frac{2}{7}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{7}$$

だから

$\triangle APE:\triangle QPB=1:7$

(4)の証明

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$ だから

$AE:CB=AP:CP=2:7$

$AE:DA=2:7$（←平行四辺形だから）

$AE:ED=2:5$

$\triangle AQB \backsim \triangle CQF$ だから

(4) $\triangle CQB:\triangle FQC=2:1$

(5) $\triangle CQF:\triangle FED=7:15$

$\triangle BQP:\triangle DEF=56:45$

(5)の証明

$\frac{\triangle BQP}{\triangle ABC}=\frac{4}{9}$ ←【まとめ】

$\frac{\triangle DAC}{\triangle DEF}=\frac{14}{5}$ ←【まとめ】

$AP:PC=2:7$ だから$AE:BC=2:7$
したがって$AE:ED=2:5$
$AQ:QC=6:3$ だから$AB:CF=6:3$
したがって$CD:CF=6:3$, $CF:FD=3:3=1:1$

$\triangle ABC=\triangle CAD$ ←平行四辺形だから

ゆえに

$\frac{\triangle BQP}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle DEF}=\frac{4}{9}\ \frac{14}{5}=\frac{56}{45}$

$AB:CF=AQ:QC=6:3=2:1$
$DC:CF=2:1$（←平行四辺形だから）
$CF:FD=1:1$

$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD}=\frac{3}{18}$ ←【まとめ】

$\frac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\frac{14}{5}$ ←【まとめ】

ゆえに

$\frac{\triangle CQF}{\triangle CAD}\frac{\triangle CAD}{\triangle FED}=\frac{3}{18}\ \frac{14}{5}=\frac{7}{15}$

だから

$\triangle CQF:\triangle FED=7:15$

問題1

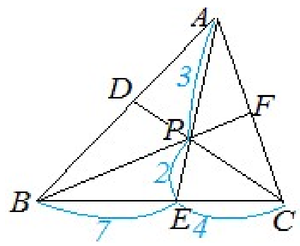
右図の$\triangle ABC$ において

(1) $\triangle BEP:\triangle CEP=$ ___ : ___
採点する やり直す

(2) $\triangle ABC:\triangle PBC=$ ___ : ___
採点する やり直す

(3) $\triangle APC:\triangle PEC=$ ___ : ___
採点する やり直す

(4) $\triangle BCP:\triangle CAP=$ ___ : ___
採点する やり直す

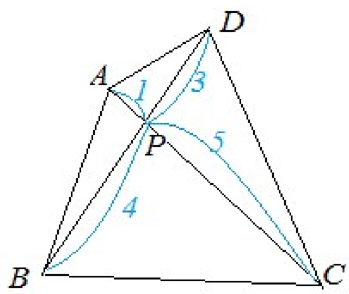


問題2

右図の四角形$ABCD$ において対角線 AC , BD の交点を P とする. $AP:PC=1:5$, $BP:PD=4:3$ のとき次の面積比を求めなさい.

(1) $\triangle APB:\triangle CPD=$ ___ : ___
採点する やり直す

(2) $\triangle APD:\triangle CPB=$ ___ : ___
採点する やり直す



問題3

右図の平行四辺形$ABCD$ において対角線 AC を $4:5:6$ に分ける点を順に P , Q とするとき，次の面積比を求めなさい．

(1) $\triangle EPA : \triangle DPC =$ ___ : ___

採点する やり直す

(2) $\triangle EPA : \triangle DPQ =$ ___ : ___

採点する やり直す

(3) $\triangle CQF : \triangle PQD =$ ___ : ___

採点する やり直す