== 無理数の独立 ==

《解説》

（定理1）
a,b が有理数のとき，
$a+b\sqrt{2}=0 \longleftrightarrow a=b=0$

なお，この関係は $\sqrt{2}$ でなくても、$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \cdots$ など，平方数でない数 n の根号 $\sqrt{n}$ に関しても成り立ちます．

a,b が有理数という条件がなければ，[→]は成り立ちません．
例 $(2)+(-\sqrt{2})\sqrt{2}=0$
例 $(\sqrt{6})+(-\sqrt{3})\sqrt{2}=0$

（証明）
[←] $0+0\sqrt{2}=0$ だから，明らか．
[→]
まず，$b=0$ を示す：

$b\neq 0$ のとき，$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$ と変形でき、左辺は無理数，右辺は有理数だから矛盾．
背理法により，$b=0$ が示される．

次に，$a=0$ を示す：

$a+0\sqrt{2}=0$ より，$a=0$

（定理2）
$a,\ b,\ c,\ d$ が有理数のとき，
$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \longleftrightarrow a=c,\ b=d$

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ などでも成り立つのは定理1のときと同様です．

（証明）
[←] 明らか．
[→]
$(a-c)+(b-d)\sqrt{2}=0$ となり，$a-c,\ b-d$ が有理数であることから、
定理1により，$a-c=0,\ b-d=0$
ゆえに，$a=c,\ b=d$

（余談）：定理1は定理2において，c＝d＝0とすれば得られます.つまり，定理1は定理2の特別な場合にすぎません.しかし，上に示したように，定理1から定理2が示されるので，定理1は定理2と同値です.実際の問題を解くときには，どちらの形で使ってもかまいません.

例
$a+3\sqrt{2}=4+d\sqrt{2}$ のとき，有理数 $a,\ b$ の値を求めなさい．
定理2の形で使うときは：$a=4,\ b=3$ ･･･(答)
定理1の形で使うときは：$(a-4)+(3-b)\sqrt{2}=0$ より $(a-4)=0,\ (3-b)=0$
ゆえに $a=4,\ b=3$ ･･･(答)

このように，定理1と定理2とは区別を意識せずに使うことができます．

定理1と定理2のような特別＝一般の関係は，恒等式の係数比較などでも見られます．

- 定理1「 $ax+b=0$ が x の恒等式 $\longleftrightarrow$ $a=b=0$ 」
- 定理2「 $ax+b=cx+d$ が x の恒等式 $\longleftrightarrow$ $a=c,\ c=d$ 」

《問題》---定理の使い方の練習

1
$a,\ b$ が有理数で，
$(1-2\sqrt{2})(a-4\sqrt{2})=b-10\sqrt{2}$ のとき，
$a=$ ＿＿，$b=$ ＿＿

採点する | やり直す | ヒント | 解答

2
$a,\ b$ が有理数で，
$(3-\sqrt{2})a+(2+3\sqrt{2})b-1+4\sqrt{2}=0$ のとき，
$a=$ ＿＿，$b=$ ＿＿

採点する　やり直す　ヒント　解答

3

$a,\ b$ が有理数で，$\dfrac{-9+7\sqrt{5}}{a+b\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$

のとき，

$a=$ ＿＿，　$b=$ ＿＿

採点する　やり直す　ヒント　解答

《問題》---背理法による証明の練習

1

以下の問に答えよ.ただし√2，√3，√6が無理数であることは使ってよい.

(1)

有理数p，q，rについて，p＋q√2+r√3＝0ならば，p＝q＝r＝0であることを示せ.

（「1999年度京都大学入試問題」の一部引用）

（答案例を見る→）

2

a，bを整数，u，vを有理数とする．u＋v√3　が

x^2＋ax＋b＝0　の解であるならば，uとvは共に整数であることを示せ.ただし√3が無理数であることは使ってよい.

（「1999年度京都大学入試問題」の一部引用）

（答案例を見る→）

3 　a，b，cが有理数で，a√2+b√3+c√6＝0ならば a＝b＝c＝0といえるかどうか調べなさい.ただし√2，√3，√6 が無理数であることは使ってよい. （答案例を見る→）	