

== たすき掛け因数分解 ==

◇たすき掛け因数分解とは◇

x^2 の係数が1でない2次式を因数分解する一つの方法が、**たすき掛け因数分解**と呼ばれる方法である。

右の例のように、 x^2 の係数が1でない2次式を因数分解するためには、4個の係数を一度に思いつかなければならないので大変であるが、もし次の形に書けるとすれば、

$$\begin{array}{r} \text{ア} \quad x + \text{イ} \\ \times) \text{ウ} \quad x - \text{エ} \\ \hline 6x^2 - x - 15 \end{array}$$

2次の係数:[ア]×[ウ]=6

定数項:[イ]×[エ]=-15 となるはずなので、

○「掛けて6、掛けて-15となる2組の数を持ってくれば、後は1次の係数が合えば答になる」

○ 試しにいろいろやってみると

<試し1>

$$\begin{array}{r} 2x \times -3 \rightarrow -9x \\ \times) 3x \quad 5 \rightarrow 10x \\ \hline 6x^2 \quad -15 \quad \boxed{x} \end{array}$$

・ここでは2次、定数項、**1次**の順に書く

・2次と定数項は、**初めから合う組合せだけを使う**ので、**1次**の係数だけに注目

・1次の係数は、**斜め方向のかけ算2つ**の和になる

==>この<試し1>では1次の係数が1になり、元の問題の因数分解にはなっていない。

例

$$6x^2 - x - 15 = (\text{ア} \quad x + \text{イ})(\text{ウ} \quad x - \text{エ})$$

※「たすき掛け因数分解」という用語は学習指導要領になく、教科書にもほとんど使われていないが、授業の中で、あるいは学習塾、予備校、参考書などでは使われることがある。「いわゆるたすき掛け」といったほうがよいかもわからない。

※ 最近では、駅伝のたすきをよく見かけるが、ここでいうたすきは、和服などで作業をしやすくするために結ぶための**背中**で×印になるように結ぶ。



ここで説明する因数分解は、**斜め方向のかけ算に注目**する因数分解のことなので「たすき掛け因数分解」といわれている。

<試し2>

$$\begin{array}{r} 2 \times 3 \rightarrow 9 \\ \times) 3 \quad -5 \rightarrow -10 \\ \hline -1 \end{array}$$

・何度も書くので x は省略する

・2次の係数、定数項は、初めから合う組合せだけを持ってくるから、確かめる必要なし

・1次の係数は**たすき掛け(の和)**これが合うものが答

==>この<試し2>では1次の係数が-1となり、元の問題と一致するので、これが答えになるが、

この式を答案にまとめるには、**この式が何の省略であったかを忘れてはいけない。**

$$\begin{array}{r} 2 \times 3 \rightarrow 9 \\ \times) 3 \quad -5 \rightarrow -10 \\ \hline -1 \end{array}$$



$$6x^2 - x - 15 = (2x+3)(3x-5) \dots \text{答}$$

◇要約◇

- (1) **2次の係数**を2つに分ける(掛けて2次の係数になる組をさがす)
- (2) **定数項**を2つに分ける(掛けて定数項になる組をさがす)
- (3) いろいろな組合せのうち、たすき掛けで**1次の係数**が合えば答にする

ただし(0)問題の式が共通因数を持っているときは、これにくっつけて、共通因数は取り除いておく。●

また、(3)で上下の式を入替えても式の順序が変わるだけだから、上下を入替える必要はない。

また、係数の符号を全部換えても同じものになるから両方調べる必要はなく、 x の係数が正のものを調べたらよい。

$$(-2x-3)(-3x+5) \leftrightarrow (2x+3)(3x-5)$$

2次の係数が負の数の場合、マイナスを出して、
 $-6x^2 + x + 15 = -(6x^2 - x - 15) = -(2x+3)(3x-5)$
 などと変形するのが楽。

※ x^2 の係数が1でない2次式が、すべてたすき掛けで因数分解できるわけではない。

ここで解説した方法は「整数係数1次式に因数分解できるものは、この方法でできる」ということで、 $2x^2 + x + 3$ のような式はたすき掛けでは因数分解できない。

■たすき掛けの弱点■

合うかどうかは運しだい。

ただし、**勘を養うと速い**●： $(3x+3)(2x-5)$ などはチェック不要。こんな場合は、元の問題が3でくくれるはず。

■たすき掛けの長所■

解の公式では、計算が複雑になる場合でも、たすき掛けなら簡単にできる…整数係数の1次式の積になるもの、文字係数の1次式、根号を含む1次式の積になるものなど。

例：次のような因数分解を解の公式で求めるのはとても大変で、たすき掛けなら簡単

$$(2x+3y+1)(3x-5y-2)$$

$$((2a+3)x+(3a-1))((3a+2)x-(5a+1))$$

例

$4x^2-23x+15$ を因数分解せよ.

(答案)

$$\begin{array}{r} 4x-3 \rightarrow -3 \\ 1x-5 \rightarrow -20 \\ \hline -23 \end{array}$$

この式を答案にまとめるには、この式が何の省略であったかを忘れてはいけない。

$$\begin{array}{r} 4x-3 \rightarrow -3 \\ 1x-5 \rightarrow -20 \\ \hline -23 \end{array}$$



(原式) = $(4x-3)(x-5)$ … 答

…次のようにいろいろ試してみて、「合うものだけ」を答案にする。舞台裏まで見せる必要なし。初めから分かっていたかのように書けばよい。…失敗が山のようにできるのは覚悟の上。

$$\begin{array}{r} 2x^3 \rightarrow 6 \\ 2x^3 \rightarrow 6 \\ 2x-5 \rightarrow 10 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x-3 \rightarrow -6 \\ 2x-3 \rightarrow -6 \\ 2x-5 \rightarrow -10 \\ \hline -16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 \rightarrow 3 \\ 1x^3 \rightarrow 3 \\ 1x-5 \rightarrow 20 \\ \hline 23 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4x-3 \rightarrow -3 \\ 1x-3 \rightarrow -3 \\ 1x-5 \rightarrow -20 \\ \hline -23 \end{array}$$

※以下において、HTML版では各問題5問ずつ出題されるところをPDF版では最初の1題のみ印刷される

■問題1 ■ 次の式を因数分解せよ。[1回 / 5回]

(1回だけ記録されます。問題は幾らでも出ます。)

(答は $(2x+1)(3x+4)$ のように x の項を前に書くこと。)

$$5x^2+39x+28 = (\text{ }) (\text{ })$$

採点 消去 Help 次問

■問題2 ■ 次の式を因数分解せよ。[1回 / 5回]

(1回だけ記録されます。問題は幾らでも出ます。)

(答は $(2x+1)(3x+4)$ のように x の項を前に書くこと。)

$$18x^2+27x+10 = (\text{ }) (\text{ })$$

採点 消去 Help 次問

○ x, y の2次式で次のような形の式では、数字と y を含めたものを x の係数と考えるとよい。

例

$$4x^2-23xy+15y^2 = 4x^2-23yx+15y^2$$

$$\begin{array}{r} 4x-3y \rightarrow -3y \\ 1x-5y \rightarrow -20y \\ \hline -23y \end{array}$$

この式を答案にまとめるには、この式が何の省略であったかを忘れてはいけない。

$$\begin{array}{r} 4x-3y \rightarrow -3y \\ 1x-5y \rightarrow -20y \\ \hline -23y \end{array}$$



(原式) = $(4x-3y)(x-5y)$ … 答

※ 左の問題では、 y がいないときの答えに y を付けたものと同じになるが、「 y も係数と見なす」という考え方は、後で登場する文字係数のときの因数分解に使う重要な考え方なので、早めに慣れておく方がよい。

■問題3 ■ 次の式を因数分解せよ。[1回 / 5回]

(1回だけ記録されます。問題は幾らでも出ます。)

(答は $(2x+y)(3x+4y)$ のように x の項を前に書くこと。)

$$12x^2-17xy-7y^2 = (\text{ }) (\text{ })$$

採点 消去 Help 次問

※ 多くの生徒にとって、以下の内容は「難しい」と見えるようなので、あなただけが落ち込む必要はありません。「 x について整理する」ことができれば全部分かります。これが分からないと、全然分かりません。

◇2文字のたすき掛け因数分解◇

(1) 次の例のように、2文字が含まれる式の因数分解では、多くの場合、1文字(例えば x) について整理して考える。

$$2x^2 + 7xy + 3y^2 - x + 2y - 1 = 2x^2 + (7y-1)x + (3y^2 + 2y - 1)$$

(2) この後、 y も含めて係数を考え、「たすき掛け」因数分解をする。

その際、 x^2 の係数は2なので、 2×1 に分けられるが、定数項 $(3y^2 + 2y - 1)$ を積に分けるためには、この部分を因数分解しておかなければならない。[大きな因数分解の準備として、定数項だけの小さな因数分解をする。*]

$$2x^2 + (7y-1)x + (3y-1)(y+1)$$

ここからが全体の大きなたすき掛けとなる。

$$\begin{array}{r} 2 \times y+1 \rightarrow y+1 \\ 1 \times 3y-1 \rightarrow 6y-2 \\ \hline 7y-1 \end{array}$$

この式を答案にまとめるには、この式が何の省略であったかを忘れてはいけない。

$$\begin{array}{r} 2 \times y+1 \rightarrow y+1 \\ 1 \times 3y-1 \rightarrow 6y-2 \\ \hline 7y-1 \end{array}$$

ゆえに、 $2x^2 + 7xy + 3y^2 - x + 2y - 1 = (2x + y + 1)(x + 3y - 1)$

[重要] 「 x について整理する」とは、 x だけを文字とし、他の文字 y などは数字と同じように係数と見なして式を降べきの順に整えることをいう。

例 次の式で赤で示したものが「 x について整理」したときの係数

- (i) $4x^2 - 23xy + 15y^2 = 4x^2 - 23yx + 15y^2$
- (ii) $2x^2 + 7xy + 3y^2 - x + 2y - 1 = 2x^2 + (7y-1)x + (3y^2 + 2y - 1)$
- (iii) $(2a+1)(a+1)x^2 + (-a^2 - a - 1)x - a(a-1)$

* 上の(iii)のように2次の係数も文字式の場合、「2次の係数」「定数項」の2箇所を、全体の大きなたすき掛けの準備としてあらかじめ因数分解しておくことになる。

この場合、「1次の係数」は因数分解する必要はなく、展開式のままが使いやすい。上の(iii)はこうして準備できた結果の式。ここから、全体の大きなたすき掛けは簡単にできる。

$$\begin{array}{r} a+1 \times -a \rightarrow -2a^2 - a \\ 2a+1 \times a-1 \rightarrow a^2 - 1 \\ \hline -a^2 - a - 1 \end{array}$$

ゆえに、(iii)式 $= ((a+1)x - a)((2a+1)x + (a-1))$
 $= (ax + x - a)(2ax + x + a - 1)$

■問題4 ■ 次の式を因数分解せよ。[1回 / 5回]

(1回だけ記録されます。問題は幾らでも出ます。)

(答は $(2x+y+1)(3x+4y-2)$ のように x の項を前に書くこと。)

$$9x^2 + 21xy - 18y^2 - 36x - 53y + 35 = (\text{ }) (\text{ })$$

採点 消去 Help 次問