== 中点連結定理1 ==

【要点】

△$ABC$ の $AB$, $AC$ の中点をそれぞれ $M$, $N$ とするとき,

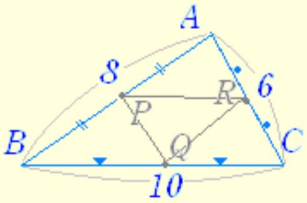
$MN//BC$ …(1)

$MN=\frac{1}{2}BC$ …(2)

が成り立ちます.
これを「中点連結定理」といいます.

**問題1**

右の△$ABC$ において, $AB$, $BC$, $CA$ の中点をそれぞれ $P$, $Q$, $R$ とし, 辺の長さをそれぞれ $AB=8$, $BC=10$, $CA=6$ とするとき, 次の辺の長さを求めなさい.




$PQ=$ 3

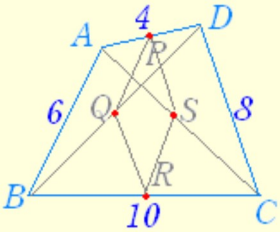
$QR=$ 4

$RP=$ 5

採点する やり直す ヘルプ

**問題2**

四角形 $ABCD$ において, 対角線 $BD$, $AC$ の中点をそれぞれ $Q$, $S$, 辺 $AD$, $BC$ の中点をそれぞれ $P$, $R$ とする. $AB=6$, $BC=10$, $CD=8$, $DA=4$ とするとき, 次の辺の長さを求めなさい.




$PQ=RS=$ 3

$QR=SP=$ 4

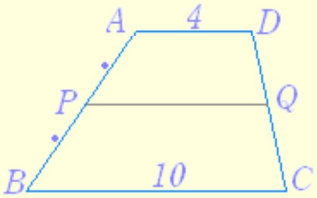
(これらから四角形 $PQRS$ は平行四辺形であることが言えます.)

採点する やり直す ヘルプ

(補助線を引く)

**問題3**

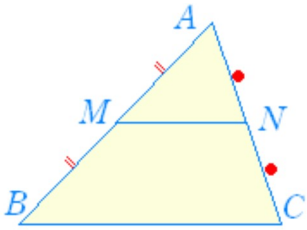
右の台形 $ABCD$ において, $AB$ の中点 $P$ から $AD$ に平行な直線をひき, 辺 $CD$ と交わる点を $Q$ とする. $BC=10$, $DA=4$ とするとき, 辺 $PQ$ の長さを求めなさい.



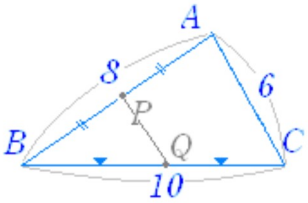

$PQ=$ 7

採点する やり直す ヘルプ

図1




△$ABC$ において $AB$, $BC$ の中点がそれぞれ $P$, $Q$ だから,




$PQ//AC$ …(1)

$PQ=\frac{1}{2}AC$ …(2)

が成り立ちます.
(2)から, $PQ=3$

同様にして, $QR=\frac{1}{2}BA=4$, $RP=\frac{1}{2}CB=5$ も成り立ちます.

△$ABD$ に中点連結定理を適用すると

$PQ=\frac{1}{2}AB=3$

△$ABC$ に中点連結定理を適用すると

$SR=\frac{1}{2}AB=3$

また
△$BCD$ に中点連結定理を適用すると

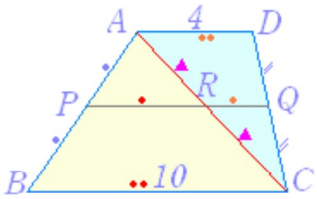
$QR=\frac{1}{2}DC=4$

△$ACD$ に中点連結定理を適用すると

$PS=\frac{1}{2}DC=4$

が成り立ちます.

対角線 $AC$ と $PQ$ の交点を $R$ とすると,
「平行線と線分の比」の性質から




$AP:PB=AR:RC=DQ:QC=1:1$

△$ABC$ に中点連結定理を適用すると

$PR=\frac{1}{2}BC=5$

△$ACD$ に中点連結定理を適用すると

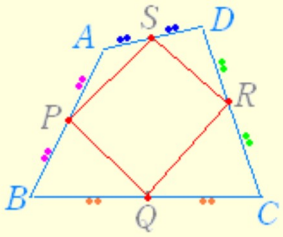
$RQ=\frac{1}{2}AD=2$

が成り立ちます.
したがって, $PQ=5+2=7$

（補助線を引く）

**問題4**

四角形 $ABCD$ において，$AB$ , $BC$ , $CD$ , $DA$ の中点をそれぞれ $P$ , $Q$ , $R$ , $S$ とおくとき，四角形 $PQRS$ はつねに平行四辺形になることを証明したい．




次の空欄を埋めて，この証明を完成しなさい．

対角線 $AC$ をひく．

$P$ , $Q$ はそれぞれ辺 $AB$ , $BC$ の中点だから，$\triangle ABC$ において中点連結定理を適用すると，

$PQ//$ AC …(1)

$PQ=\frac{1}{2}$ AC …(2)

また，$R$ , $S$ はそれぞれ辺 $CD$ , $DA$ の中点だから，$\triangle CDA$ において中点連結定理を適用すると，　$SR//$ AC …(3)

$SR=\frac{1}{2}$ AC …(4)

(1)(3)より $PQ//SR$ ，(2)(4)より $PQ=SR$ になり，向かい合う1組の辺が「平行」で「長さが等しい」から，四角形 $PQRS$ は平行四辺形

採点する　やり直す　ヘルプ

$\triangle ABC$ に中点連結定理を適用すると

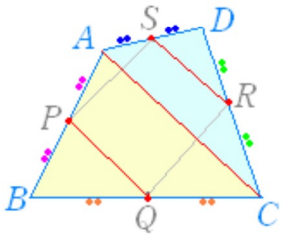
$PQ//AC$

$PQ=\frac{1}{2}AC$

$\triangle BCD$ に中点連結定理を適用すると

$SR//AC$

$SR=\frac{1}{2}AC$




が成り立ちます．

$PQ//AC$ , $AC//SR$ より $PQ//SR$

$PQ=\frac{1}{2}AC$ , $SR=\frac{1}{2}$ より $PQ=SR$

これにより，向かい合う1組の辺 $PQ$ , $SR$ が平行でかつ長さが等しいことが言えます．

※　この問題では「向かい合う1組の辺が平行でかつ長さが等しい　→　平行四辺形」という定理を使ったが，「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行　→　平行四辺形」という定理を使って証明するときは，次の(A)のように書けばよい．また，「2組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい　→　平行四辺形」という定理を使って証明するときは，次の(B)のように書けばよい．

(A)

$PQ//AC$ , $SR//AC$より $PQ//AC$

$QR//BD$ , $PS//BD$より $QR//BD$

以上により 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行だから $PQRS$ は平行四辺形

(B)

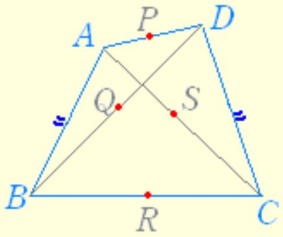
$PQ=\frac{1}{2}AC$ , $SR=\frac{1}{2}AC$より $PQ=SR$

$QR=\frac{1}{2}BD$ , $PS=\frac{1}{2}BD$より $QR=PS$

以上により 2組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しいから $PQRS$ は平行四辺形

**問題5**

$AB=CD$ である四角形 $ABCD$ において対角線 $BD$ , $AC$ の中点をそれぞれ $Q$ , $S$，辺 $AD$ , $BC$ の中点をそれぞれ $P$ , $R$ とするとき，四角形 $PQRS$ の形について，次のうち最も適するものを選びなさい．




台形　平行四辺形　ひし形　長方形　正方形

ヘルプ

$PQ=\frac{1}{2}AB=SR$

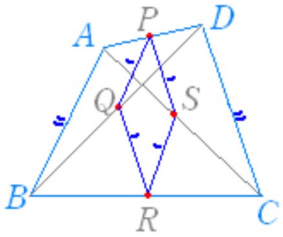
$QR=\frac{1}{2}DC=PS$

さらに

$AB=CD$

だから

$PQ=QR=RS=SP$

が成り立つ

4辺の長さが等しい四角形は「ひし形」と呼ばれる．