== 3次以上の因数分解 ==

※ 3次以上の式の因数分解を行う強力な方法として「因数定理」があるが，これは数学IIで習う．数学Iではもっと簡単に「因数分解公式」「置き換え」などで因数分解できるものだけを扱う．

[I]　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
[II]　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

■証明するには右辺を展開してみるとよい．

$$\begin{aligned}(a+b)&(a^2-ab+b^2)\\ &=a^3-a^2b+ab^2\\ &\qquad +a^2b-ab^2+b^3\\ &=a^3 \qquad\qquad +b^3=\text{(左辺)}\end{aligned}$$

（1次が＋）（2次の符号が交替）⇒（3次は両端だけ残る）

$$\begin{aligned}(a-b)&(a^2+ab+b^2)\\ &=a^3+a^2b+ab^2\\ &\qquad -a^2b-ab^2-b^3\\ &=a^3 \qquad\qquad -b^3=\text{(左辺)}\end{aligned}$$

（1次の符号が交替）（2次の符号は一定）⇒（3次は両端だけ残る）

このように「中間項が消える」のは，一方の符号だけが交替で現われるためである．

他の例

$$\begin{aligned}(x+1)&(x^3-x^2+x-1)\\ &=x^4-x^3+x^2-x\\ &\qquad +x^3-x^2+x-1\\ &=x^4 \qquad\qquad -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-1)&(x^4+x^3+x^2+x+1)\\ &=x^5+x^4+x^3+x^2+x\\ &\qquad -x^4-x^3-x^2-x-1\\ &=x^5 \qquad\qquad\qquad -1\end{aligned}$$

注意すべきこと

[I] [II] の公式は $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ とは全く関係がない．
すなわち
a^3-b^3 #等しくない# $(a-b)(a^2+2ab+b^2)$
a^3+b^3 #等しくない# $(a+b)(a^2-2ab+b^2)$

[I] [II]の例

$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2\cdot x+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$
$8x^3-27=(2x)^3-3^3=(2x-3)(4x^2+(2x)\cdot 3+3^2)$
$\qquad=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

問題1　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1)　x^3+64 ○
⇒　$(x+4)(x^2-4x+16)$ ，$(x-4)(x^2+4x+16)$
$(x+4)(x^2-8x+16)$ ，$(x-4)(x^2+8x+16)$

解説
x^3+4^3
$=(x+4)(x^2-4x+4^2)$
$=(x+4)(x^2-4x+16)$
※実係数では，2次式の部分をこれ以上因数分解することはできない．[$x^2-4x+16=(x-2)^2+12>0$だから$x^2-4x+16=0$の解が虚数になる…詳しくは数学Ⅱで習う…特に指定がなければ $(x^2-4x+16)=(x-2+2\sqrt{3}i)(x-2-2\sqrt{3}i)$ までは分けない]

(2)　$27x^3-8y^3$ ○
⇒　$(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
$(3x+2y)(9x^2-12xy+4y^2)$
$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
$(3x-2y)(9x^2+12xy+4y^2)$

解説
$(3x)^3-(2y)^3$
$=(3x-2y)\{(3x)^2+(3x)(2y)+(2y)^2\}$
$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
※実係数では，2次式の部分をこれ以上因数分解することはできない[$9x^2-+6xy+4^2=0$の解が虚数になる…詳しくは数学Ⅱで習う…特に指定がなければ
$(9x^2-6xy+4y^2)=9(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{3}y)(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{3}y)$ までは分けない]

次の公式は教科書には登場しないが，入試ではよく出る．

問題2　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

[III]　$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

■証明するには，まず $(a+b)^3$ を作るとよい．

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3a^2b-3ab^2-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-bc-ca)-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

[III]の例

$x^3+y^3+1-3xy$
$=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

$x^3-8y^3+6xy+1=x^3+(-2y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot 1$
$=(x-2y+1)(x^2+4y^2+1+2xy+2y-x)$

(1) $x^3-y^3+1+3xy$ ○
⇒ $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

$(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y)$

$(x-y+1)(x^2+y^2+1+xy-x+y)$

$(x-y+1)(x^2+y^2+1+2xy-2x+2y)$

解説
$x^3+(-y)^3+1^3-3(x)\cdot(-y)\cdot(1)$
$=(x-y+1)\{x^2+(-y)^2+1^2-(x)\cdot(-y)-(-y)\cdot(1)-(1)\cdot(x)\}$
$=(x-y+1)(x^2+y^2+1+xy+y-x)$
※実係数では，2次式の部分をこれ以上因数分解することはできない

(2) $x^3-y^3-6xy-8$ ○
⇒ $(x+y+2)(x^2+y^2+4-xy-2x-2y)$

$(x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y)$

$(x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y)$

$(x-y-2)(x^2+y^2+4+xy+2x-2y)$

解説
$x^3+(-y)^3+(-2)^3-3(x)\cdot(-y)\cdot(-2)$
$=(x-y-2)\{x^2+(-y)^2+(-2)^2-(x)\cdot(-y)-(-y)\cdot(-2)-(-2)\cdot(x)\}$
$=(x-y-2)(x^2+y^2+4+xy-2y+2x)$
※実係数では，2次式の部分をこれ以上因数分解することはできない

.

[IV]　x^2, x^4, x^6 … のようにx の偶数乗から成る式を複二次式という．
複二次式は $x^2=A$ と「置き換え」ると因数分解しやすい

[IV]の例

x^4+x^2-6 の因数分解
$x^2=A$ とおくと
（原式）$=A^2+A-6=(A+3)(A-2)$
元の x に戻すと $(x^2+3)(x^2-2)$ …（答）

x^4-6x^2+8 の因数分解
$x^2=A$ とおくと
（原式）$=A^2-6A+8=(A-2)(A-4)$
元の x に戻すと $(x^2-2)(x^2-4)$
※安心するのはまだ早い！ x^2-4 は，さらに因数分解できる．
$(x^2-2)(x+2)(x-2)$ …（答）

※ 考えようによっては，x^2-2 も $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ とも書けるが，通常「特に断り書きがなければ，係数は有理数（整数・分数）の範囲で因数分解する」ことになっているので上記の答案でよい．

問題3　次の式を因数分解せよ．
（正しいものを選べ．）

(1) x^4-2x^2-3 ○
⇒ $(x^2+3)(x^2-1)$

$(x^2-3)(x^2+1)$

$(x^2+3)(x+1)(x-1)$

$(x^2+1)(x+3)(x-3)$

解説
$x^2=A$とおくと
$A^2-2A-3=(A-3)(A+1)$
xに戻すと
$(x^2-3)(x^2+1)$…（答）
※整数や有理数の係数の範囲では，x^2-3の部分をこれ以上因数分解することはできない．また，実係数の範囲ではx^2-3の部分をこれ以上因数分解することはできない．

(2) $3x^4-11x^2-4$ ○

⇒ $(3x^2-4)(x^2+1)$

$(3x^2+4)(x+1)(x-1)$

$(3x^2-1)(x^2+4)$

$(3x^2+1)(x+2)(x-2)$

解説

$x^2=A$とおくと

$3A^2-11A-4=(3A+1)(A-4)$ ←たすき掛け因数分解

xに戻すと

$(3x^2+1)(x^2-4)$

$=(3x^2+1)(x-2)(x+2)$…(答)

※実係数の範囲では$3x^2+1$の部分をこれ以上因数分解することはできない.

[V]

$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$ などのように「同じもの」が2回以上登場するときは，その同じものを A とおくと因数分解しやすい.

[IV]の例

$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$ の因数分解

$x^2+2x=A$ とおくと

（原式）$=A^2-2A-3=(A+1)(A-3)$

元の x に戻すと

$(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=(x+1)^2(x+3)(x-1)$ …(答)

同じものがないときは「作る」

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$ の因数分解

（原式）$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-8$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$

$x^2+5x=A$ とおくと

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$

$=(A+4)(A+6)-8=A^2+10A+24-8=A^2+10A+16$

$=(A+8)(A+2)$

元の x に戻すと

$(x^2+5x+8)(x^2+5x+2)$ …(答)

（※整数係数ではこれ以上因数分解できない.）

問題4　次の式を因数分解せよ.

（正しいものを選べ.）

※　途中計算は各自で左のように行うこと.

(1) $(x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+4$ ○

⇒ $(x^2-3x+1)(x^2-3x+4)$

$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)$

$(x^2-3x-1)(x^2-3x-4)$

$(x^2-3x-1)(x^2-3x-5)$

解説

$x^2-3x=A$とおくと,

（原式）$=A^2+5A+4=(A+1)(A+4)$

xに戻すと

（原式）$=(x^2-3x+1)(x^2-3x+4)$

（※有理数の係数ではこれ以上因数分解できない.）

(2) $(x^2+2x)(x^2+2x+4)-12$ ○

⇒ $(x^2+2x-3)(x^2+2x+4)$

$(x^2+2x-4)(x^2+2x+3)$

$(x^2+2x-6)(x^2+2x+2)$

$(x^2+2x-2)(x^2+2x+6)$

解説

$x^2+2x=A$とおくと,

（原式）$=A(A+4)-12=A^2+4A-12=(A-2)(A+6)$

xに戻すと

（原式）$=(x^2+2x-2)(x^2+2x+6)$

（※有理数の係数ではこれ以上因数分解できない.）