

== 3次以上の因数分解 ==

※ 3次以上の式の因数分解を行う強力な方法として「因数定理」があるが、これは数学IIで習う。数学Iではもっと簡単に「因数分解公式」「置き換え」などで因数分解できるものだけを扱う。

$$[i] \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$[ii] \quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

■ 証明するには右辺を展開してみるとよい。

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3-a^2b+ab^2 \\ &\quad +a^2b-ab^2+b^3 \\ &= a^3 \quad \quad \quad +b^3 = (\text{左辺}) \end{aligned}$$

(1次が+) (2次の符号が交替) ⇒ (3次は両端だけ残る)

$$\begin{aligned} (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3+a^2b+ab^2 \\ &\quad -a^2b-ab^2-b^3 \\ &= a^3 \quad \quad \quad -b^3 = (\text{左辺}) \end{aligned}$$

(1次の符号が交替) (2次の符号は一定) ⇒ (3次は両端だけ残る)

このように「中間項が消える」のは、一方の符号だけが交替で現われるためである。

他の例

$$\begin{aligned} (x+1)(x^3-x^2+x-1) &= x^4-x^3+x^2-x \\ &\quad +x^3-x^2+x-1 \\ &= x^4 \quad \quad \quad -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) &= x^5+x^4+x^3+x^2+x \\ &\quad -x^4-x^3-x^2-x-1 \\ &= x^5 \quad \quad \quad -1 \end{aligned}$$

次の公式は教科書には登場しないが、入試ではよく出る。

注意すべきこと

[i] [ii] の公式は  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$  とは全く関係がない。

すなわち

$$a^3-b^3 \neq (a-b)(a^2+2ab+b^2)$$

$$a^3+b^3 \neq (a+b)(a^2-2ab+b^2)$$

[i] [ii] の例

$$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$8x^3-27=(2x)^3-3^3=(2x-3)(4x^2+(2x) \cdot 3+3^2)$$

$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$$

問題1 次の式を因数分解せよ。(正しいものを選べ。)

(1)  $x^3+64$

⇒  $(x+4)(x^2-4x+16)$ ,  $(x-4)(x^2+4x+16)$

$(x+4)(x^2-8x+16)$ ,  $(x-4)(x^2+8x+16)$

(2)  $27x^3-8y^3$

⇒  $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

$(3x+2y)(9x^2-12xy+4y^2)$

$(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

$(3x-2y)(9x^2+12xy+4y^2)$

問題2 次の式を因数分解せよ。(正しいものを選べ。)

$$\text{[III]} \quad a^3+b^3+c^3-3abc \\ = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

■証明するには、まず  $(a+b)^3$  を作るとよい。

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc \\ &= (a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc \\ &= \{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3a^2b-3ab^2-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab-bc-ca)-3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

**[III]の例**

$$\begin{aligned} x^3+y^3+1-3xy \\ &= (x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y) \\ x^3-8y^3+6xy+1 &= x^3+(-2y)^3+1^3-3 \cdot x \cdot (-2y) \cdot 1 \\ &= (x-2y+1)(x^2+4y^2+1+2xy+2y-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^3-y^3+1+3xy \\ \Rightarrow (x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y) \\ (x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y) \\ (x-y+1)(x^2+y^2+1+xy-x+y) \\ (x-y+1)(x^2+y^2+1+2xy-2x+2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^3-y^3-6xy-8 \\ \Rightarrow (x+y+2)(x^2+y^2+4-xy-2x-2y) \\ (x-y+2)(x^2+y^2+4+xy-2x+2y) \\ (x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y) \\ (x-y-2)(x^2+y^2+4+xy+2x-2y) \end{aligned}$$

**[IV]**  $x^2, x^4, x^6 \dots$  のように  $x$  の偶数乗から成る式を複二次式という。

複二次式は  $x^2=A$  と「置き換え」ると因数分解しやすい

**[IV]の例**

$$\begin{aligned} x^4+x^2-6 \text{ の因数分解} \\ x^2=A \text{ とおくと} \\ (\text{原式}) &= A^2+A-6=(A+3)(A-2) \\ \text{元の } x \text{ に戻すと } &(x^2+3)(x^2-2) \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 \text{ の因数分解} \\ x^2=A \text{ とおくと} \\ (\text{原式}) &= A^2-6A+8=(A-2)(A-4) \\ \text{元の } x \text{ に戻すと } &(x^2-2)(x^2-4) \end{aligned}$$

※安心するのはまだ早い！  $x^2-4$  は、さらに因数分解できる。

$$(x^2-2)(x+2)(x-2) \dots (\text{答})$$

※考えようによっては、 $x^2-2$  も  $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$  とも書けるが、通常「特に断り書きがなければ、係数は有理数(整数・分数)の範囲で因数分解する」ことになっているので上記の答案でよい。

問題3 次の式を因数分解せよ。

(正しいものを選べ。)

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4-2x^2-3 \\ \Rightarrow (x^2+3)(x^2-1) \\ (x^2-3)(x^2+1) \\ (x^2+3)(x+1)(x-1) \\ (x^2+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

$$(2) \quad 3x^4-11x^2-4$$

$$\Rightarrow (3x^2-4)(x^2+1)$$

$$(3x^2+4)(x+1)(x-1)$$

$$(3x^2-1)(x^2+4)$$

$$(3x^2+1)(x+2)(x-2)$$

**[V]**

$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$  などのように「同じもの」が2回以上登場するときは、その同じものを  $A$  とおくと因数分解しやすい。

**[IV]の例**

$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3$  の因数分解

$x^2+2x=A$  とおくと

$$(\text{原式})=A^2-2A-3=(A+1)(A-3)$$

元の  $x$  に戻すと

$$(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=(x+1)^2(x+3)(x-1) \cdots (\text{答})$$

同じものがないときは「作る」

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$  の因数分解

$$(\text{原式})=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-8$$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$$

$x^2+5x=A$  とおくと

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8$$

$$=(A+4)(A+6)-8=A^2+10A+24-8=A^2+10A+16$$

$$=(A+8)(A+2)$$

元の  $x$  に戻すと

$$(x^2+5x+8)(x^2+5x+2) \cdots (\text{答})$$

(※整数係数ではこれ以上因数分解できない。)

問題4 次の式を因数分解せよ。

(正しいものを選べ。)

※ 途中計算は各自で左のように行うこと。

$$(1) (x^2-3x)^2+5(x^2-3x)+4 \\ \Rightarrow (x^2-3x+1)(x^2-3x+4)$$

$$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)$$

$$(x^2-3x-1)(x^2-3x-4)$$

$$(x^2-3x-1)(x^2-3x-5)$$

$$(2) (x^2+2x)(x^2+2x+4)-12 \\ \Rightarrow (x^2+2x-3)(x^2+2x+4)$$

$$(x^2+2x-4)(x^2+2x+3)$$

$$(x^2+2x-6)(x^2+2x+2)$$

$$(x^2+2x-2)(x^2+2x+6)$$