== 定数係数の2階線形微分方程式 ==(同次)

【準備1】

1. 2階微分方程式の一般解は2つの任意定数を含んだ形になります.
2. 2階微分方程式の2つの1次独立な解を y_1 , y_2 とするとき，それらの1次結合

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

も解となります.

⇩

- 2階斉次微分方程式に対して2つの1次独立な解 y_1 , y_2 を見つけると，一般解は

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

の形で表すことができます.

(解説)
1. 1回の積分で任意定数が1つ登場しますので，2回積分すると任意定数は2つ登場します.

【例】

$y''=0 \Leftrightarrow y'=C_1 \Leftrightarrow y=C_1x+C_2$

このように2階導関数を含む微分方程式から関数 y を求めると2つの任意定数を含む式になります.

2. 2つの関数 y_1 , y_2 が一方が他方の定数倍になっているときはそれらは1次従属と呼ばれ，そうでないとき1次独立と呼ばれます.

【例】

2つの関数 $y=2x$ と $y=3x$ とは1次従属です: $3x=\frac{3}{2}(2x)$

しかし，2つの関数 $y=e^{2x}$ と $y=e^{3x}$ とは1次独立です:

$y=e^{2x}=(e^x)^2=e^xe^x$

$y=e^{3x}=(e^x)^3=e^xe^xe^x$

一方が他方の定数倍では表されません.

斉次方程式

$y''+ay'+by=0$ （a, b は定数）

の異なる2つの1次独立な解を y_1 , y_2 とするとき

$y_1''+ay_1'+by_1=0$

$y_2''+ay_2'+by_2=0$

だから

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+a(C_1y_1+C_2y_2)'+b(C_1y_1+C_2y_2)$$
$$=C_1(y_1''+ay_1'+by_1)+C_2(y_2''+ay_2'+by_2)$$
$$=0$$

が成り立ちます.

【準備2】

定数係数の2階線形斉次常微分方程式を解く上では，指数関数の次の特徴が鍵になります.

$y=e^{rx}$ (r は定数)のとき

$y'=re^{rx}$

$y''=r^2e^{rx}$

したがって $y=e^{rx}$ (r は定数)のとき

$y''+ay'+by=0$ …(1)

$r^2e^{rx}+are^{rx}+be^{rx}=e^{rx}(r^2+ar+b)=0$

は，$e^{rx}>0, \neq 0$ に注意すると，次の2次方程式と必要十分になります.

$r^2+ar+b=0$ …(2)

⇩

(2)の2次方程式の解を使えば(1)の微分方程式の解が求められます.

この頁では高校物理の力学や電磁気学でしばしば登場する定数係数の2階線形常微分方程式の解き方を扱います.

通常，高校の数学(数学Ⅲ)では2階微分方程式の解き方は扱われませんが，重要な物理学の法則は2階微分方程式で表され，2階微分方程式の解き方を学ぶとそれらを深く理解することができます.

2階以上の微分方程式は変数分離形1階微分方程式の場合のような，移項や割り算などの変形による形式的な処理で解くことはできませんが，以下に述べるように指数関数の特徴を手掛かりとして解くことができます.

○ 微分方程式中の最高階の導関数の階数を微分方程式の階数といいます.

第1階導関数までが含まれる微分方程式 $y'+f(x)y=g(x)$

あるいは $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$

は1階微分方程式と呼ばれます.

第1階導関数 y' をさらにもう一回微分した第2階導関数は，記号 y''

あるいは $\frac{d^2y}{dx^2}$ で表されます.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ は $\frac{d^2y}{dx^2}$ と書きます.

$\frac{dy^2}{dx^2}$ や $\frac{d^2y}{d^2x}$ ではないことに注意してください.

第2階導関数までが含まれる微分方程式

$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$

あるいは $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x, y, y')$

は2階微分方程式と呼ばれます.

○ 独立変数が1個のときは常微分方程式，2個以上のときは偏微分方程式と呼ばれます. この頁では独立変数が x あるいは t のように1つの場合を扱うので，以下に述べるのは常微分方程式です.

○ $y, y', y'', \ldots$ などの積や商を含まない

$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$

のような形の微分方程式は線形微分方程式と呼ばれます.

○ $y''+f(x)y'+g(x)y=h(x)$ の形の微分方程式のうちで $h(x)=0$ の場合を斉次(同次)方程式といいます.

⇩

この頁では

$y''+ay'+by=0$ （a, b は定数）

の形の微分方程式を扱います. この形の微分方程式は，上記の約束に沿って言うと，定数係数の2階線形斉次常微分方程式ということになります.

【例1】

微分方程式

$y''-4y'+3y=0$ …(1)

に対して，$y=e^{rx}$ (r は定数)の形の解を求める場合，r は次の2次方程式の解となります.

$r^2-4r+3=0$ …(2)

特性方程式(2)を解くと

$(r-1)(r-3)=0$

$r=1, 3$

したがって

$y=e^x, e^{3x}$

が(1)の2つの解となります.

したがって

$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$ …(3)

が一般解になります.

(2)を微分方程式(1)の特性方程式といいます.

【要点】
微分方程式
$y''+ay'+by=0$ （ a, b は定数）…(1)
の一般解は，2次方程式
$r^2+ar+b=0$ …(2)
の解によって表すことができ，

1. (2)式が異なる2つの実数解 p, q をもつとき
$y=C_1e^{px}+C_2e^{qx}$
2. (2)式が異なる2つの虚数解 $h\pm ki$ をもつとき
$y=e^{hx}(C_1\cos kx+C_2\sin kx)$
3. (2)式が重解 p をもつとき
$y=e^{px}(C_1+C_2x)$

となる.

(解説)
1. ←上記の準備2の通り

2. 高校では指数が複素数になる形や複素数の微分積分は習わないが，途中経過が複素数になるだけで結果は実数に戻すことができるので，難しく感じるときは結果だけを利用すればよい.

(2)式が異なる2つの虚数解 $h\pm ki$ をもつとき，(1)の解は
$y_1=e^{(h+ki)x}$, $y_2=e^{(h-ki)x}$
となります.
これらは
$y_1=e^{hx}e^{kxi}$, $y_2=e^{hx}e^{-kxi}$
と書けます.
オイラーの公式
$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ （ i は虚数単位）
を用いると
$e^{kxi}=\cos kx+i\sin kx$
$e^{-kxi}=\cos(kx)+i\sin(-kx)=\cos kx-i\sin kx$
だから
$y_1=e^{hx}e^{kxi}=e^{hx}(\cos kx+i\sin kx)$
$y_2=e^{hx}e^{-kxi}=e^{hx}(\cos kx-i\sin kx)$
実数のみで表すためには，次の y_3, y_4 を2つの解とすればよい.
$$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{hx}\cos kx$$
$$y_4=\frac{y_1-y_2}{2i}=e^{hx}\sin kx$$
これらを使って一般解は
$y=C_1e^{hx}\cos kx+C_2e^{hx}\sin kx$
と表せることになります.

3. 2次方程式が（実数の）重解を持つときは，そのままでは一般解を表すための2つの異なる解が得られませんが，（なぜ思いつくのかは別として）解 $y_1=e^{px}$ に x を掛けた関数 $y_2=xe^{px}$ を考えると，y_2 も微分方程式の解になることを確かめることができます.

$x=p$ が2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の重解であるとき，解と係数の関係から
$2p=-a$, $p^2=b$
これにより，微分方程式を p で表すと
$y''-2py'+p^2y=0$ …(1)
関数 $y_2=xe^{px}$ の導関数，第2次導関数を求めると
$y_2'=e^{px}+xpe^{px}=e^{px}(1+px)$
$y_2''=pe^{px}(1+px)+e^{px}\cdot p=e^{px}(2p+p^2x)$
このとき
$y_2''-2py_2'+p^2y_2$
$=e^{px}(2p+p^2x)-2pe^{px}(1+px)+p^2xe^{px}$
$=e^{px}(2p+p^2x-2p-2p^2x+p^2x)=0$

※ オイラーの公式はべき級数展開を用いて証明することができます.
$$e^{ix}=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}\cdots$$
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$$
$$=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots)+i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots)$$
$$=\cos x+i\sin x$$

※ $y=e^{ix}$ のような複素数で表される関数も i を普通の文字式と同様に扱えば微分・積分することができます（ただし，$i^2=-1$ ）.
$y'=ie^{ix}$
$y''=i^2e^{ix}=-e^{ix}$
したがって
$y=e^{ix}$ ⇔ $y''=-y$
つまり,2階微分方程式 $y''=-y$ の1つの解は $y=e^{ix}$ であると言えます.
（ただ，このままでは関数が複素数で表されているので，これを実数値をとる関数に直すために，前述の y_3，y_4 で表すようにします．）

【例1】
微分方程式 $y''-5y'-6y=0$ の一般解を求めてください.

(解答)
特性方程式 $r^2-5r-6=0$ を解くと
$(r+1)(r-6)=0$ より
$r=-1, r=6$
微分方程式の一般解は
$y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$ …(答)

【例2】
微分方程式 $y''+2y'+5y=0$ の一般解を求めてください.

(解答)
特性方程式 $r^2+2r+5=0$ を（解の公式で）解くと
$r=-1\pm\sqrt{-4}=-1\pm 2i$
微分方程式の一般解は
$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$ …(答)

【例3】
微分方程式 $y''-6y'+9y=0$ の一般解を求めてください.

(解答)
特性方程式 $r^2-6r+9=0$ を解くと
$(r-3)^2=0$ より
$r=3$（重解）
微分方程式の一般解は
$y=e^{3x}(C_1+C_2x)$ …(答)

【問題】 次の微分方程式の一般解を求めてください．
（はじめに問題を選び，続けて右欄の中から一般解を選んでください．）

（1） $y''-y'-2y=0$

（2） $y''-4y'+5y=0$

（3） $y''=-4y$

（4） $y''+4y'+4y=0$

（5） $y''=4y$

$y=C_1 e^{-2x}+C_2 e^{2x}$

$y=C_1 e^{-x}+C_2 e^{2x}$

$y=e^{-x}(C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x)$

$y=e^{2x}(C_1 \cos x+C_2 \sin x)$

$y=C_1 \cos 2x+C_2 \sin 2x$

$y=e^{-2x}(C_1+C_2 x)$

$y=e^{x}(C_1+C_2 x)$