== 2次式の因数分解 ==

※ [1]～[IV]の公式は中学校の復習となっているが，高校では「置き換え」による因数分解などやや高度なものも含まれている．

共通因数でくくる

[I]　$ma+mb=m(a+b)$

[I]の例

$$5x^2y+20xy^2 \overset{(1)}{=} 5(x^2y+4xy^2) \overset{(2)}{=} 5xy(x+4y)$$

注意
途中経過として(1)のような式を書くのは自由である(解答者が思いついた順序によっては xy(5x+20y) など他の形となる場合もあり得る)が，最終形は(2)の形にしなければならない．
つまり，共通因数は全部くくり出さなければならず，最終形にまだ共通因数が残っているような形では正解とならない．

$a+b$ のような「式が共通因数」となることもある．

$$(a+b)x^2-(a+b)x=(a+b)(x^2-x)=(a+b)x(x-1)$$

$b-a=-(a-b)$ だから，次の式は共通因数でくくれる．

$$(a-b)x+(b-a)y=(a-b)x-(a-b)y=(a-b)(x-y)$$

一般に，引き算の順序が逆になっているものは「同じ因数で符号だけが逆」になる．　$y-x=-(x-y)$ など

※共通因数でくくる変形は「公式を用いる因数分解よりも先に行う」方がよい．

例

そのままの形では○^{2}−□^{2}の形に見えないが，共通因数でくくると分かるもの

$$2x^3-50x=2x(x^2-25)=2x(x+5)(x-5)$$

問題1　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1)　$3x^2-x$

⇒　$2x$，$2x^2$，$\boxed{x(3x-1)}$，$3x(x-1)$

【答案の傾向】
2011.5.8--2012.10.1の期間に寄せられた答案1000件について
（以下の問題についても同様）
≪正答率≫　この問題の正答率は79%で，よくできています．
≪主な誤答≫　$3x(x-1)$ を選んだ答案が14%ありました．
≪ここがポイント≫　共通因数はx です．
解答は赤枠で示した選択肢

(2)　$6ax^2-3axy$

⇒　$3(2ax^2-axy)$，$x(6ax-3ay)$
$3a(2x^2-xy)$，$\boxed{3ax(2x-y)}$，$6ax(x-y)$

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は83%で，よくできています．
≪主な誤答≫　誤答はバラバラに分かれています．
≪ここがポイント≫　共通因数はなるべく多く取るので$3ax$ になります．
解答は赤枠で示した選択肢

(3)　$(a+2b)x-(a+2b)y$

⇒　$(a+2b)(x+y)$，$\boxed{(a+2b)(x-y)}$
$(a-2b)(x+y)$，$(a-2b)(x-y)$

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は82%で，よくできています．
≪主な誤答≫　誤答はバラバラに分かれています．
≪ここがポイント≫　共通因数は$a+2b$ になります．
解答は赤枠で示した選択肢

(4)　$a(x-y)+y-x$

⇒　$(x-y)(a+1)$，$\boxed{(x-y)(a-1)}$
$(y-x)(a+1)$，$(y-x)(a-1)$

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は68%に下がっています．
≪主な誤答≫　$(x-y)(a+1)$ を選んだ答案が14%ありました．
≪ここがポイント≫　$y-x$ を$-(x-y)$ と変形します．
解答は赤枠で示した選択肢

[II]　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
[III]　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
[IV]　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

[II]の例

$$9x^2+6x+1=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot 1+1^2=(3x+1)^2$$

■　両端の式 $3x$，1 を先に見ること．最後に中央の項がそれ

問題2　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1)　$x^2+8x+16$

⇒　$\boxed{(x+4)^2}$，$(x+12)^2$，$(x+18)^2$，2乗にならない

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は92%で，よくできています．
≪主な誤答≫　誤答はバラバラに分かれています．
≪ここがポイント≫　16 を4^2 と読み，$8x$ を$2\cdot 4\cdot x$ と読みます．

らの積の 2 倍になっていれば( )の2乗としてよい.
■ 前から順に見ていくと失敗することが多い.

[III]の例

$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2$

■ 次のような式は，中央の項が両端として考える1次式の積の 2 倍になっていないので( )の2乗とはならないので注意すること.

$$4x^2-6xy+9y^2$$
$$x^2+x+1$$

[IV]の例

$4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$

$3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

■公式を考える前に共通因数でくくっておく.

解答は赤枠で示した選択肢

(2) $9x^2-24xy+16y^2$ ○

⇒ $9(x+4y)^2$，$9(x-4y)^2$，2乗にならない
$(3x+4y)^2$，$\boxed{(3x-4y)^2}$，$(3x-8y)^2$

【答案の傾向】
≪正答率≫ この問題の正答率は70%に下がりました.
≪主な誤答≫ $(3x+4y)^2$ を選んだ答案が12%ありました.
≪ここがポイント≫ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ と$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ とでは真中の項の符号が違います.
解答は赤枠で示した選択肢

(3) $x^2-2xy+4y^2$ ○

⇒ $(x-2)^2$，$(x-2y)^2$
$(x-4)^2$，$(x-4y)^2$，$\boxed{\text{2乗にならない}}$

【答案の傾向】
≪正答率≫ この問題の正答率は57%まで下がりました.
≪主な誤答≫ $(x-2y)^2$ を選んだ答案が30%もありました.
≪ここがポイント≫ $(x-2y)^2$ となるためには，真中の項が $2\times x\times 2y=4xy$ になっていなければなりません．真中の項が $x\times 2y$ では$x^2-2xy+4y^2$ にはなりません
解答は赤枠で示した選択肢

(4) $5x^3-45x$ ○

⇒ $3x(x+5)(x-5)$，$3x(x+9)(x-9)$
$5x(x+2)(x-2)$，$\boxed{5x(x+3)(x-3)}$
$5x(x+9)(x-9)$，因数分解できない

【答案の傾向】
≪正答率≫ この問題の正答率は70%で，まずまずです.
≪主な誤答≫ 「因数分解できない」を選んだ答案が14%ありました.
≪ここがポイント≫ 何よりも先に共通因数をくくりだします．共通因数は$5x$ です．そうすると残りの因数はx^2-9 になって，簡単に因数分解できます．このように，因数分解の優先順位としては (1) 共通因数，(2) 公式による因数分解 の順で考えます.
解答は赤枠で示した選択肢

[V]　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

[V]の例

$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\cdot 3=(x+2)(x+3)$

■ このような問題では，
「最初に」2数の積が 6 になる組を考えること.
　1と6の組，2と3の組　が考えられる.
「次に」それらのうちで2数の和が 5 になる組を採用する.
　1と6の組 → 1+6=7 ×　，2と3の組 → 2+3=5　○
こうして，$(x+2)(x+3)$ を答えにする.
※「最初に」2数の和が5になる組を考えると，いくらでもあるから絞りきれない.

$x^2-7x+12=x^2+(-4-3)x+(-3)\cdot(-4)=(x-3)(x-4)$

■ 積が正の数12で，和が負の数−7となる2数は「負の

問題3　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1) $x^2+14x+24$ ○

⇒ $(x+3)(x+8)$，$(x+4)(x+6)$
$\boxed{(x+2)(x+12)}$，$(x+2)(x+7)$

【答案の傾向】
≪正答率≫ この問題の正答率は87%で，よくできました.
≪主な誤答≫ 誤答はバラバラに分かれています.
≪ここがポイント≫ 2数の積が24 になるだけでなく，和が14 になっているかどうかも調べる必要があります：⇒2 と12
解答は赤枠で示した選択肢

数」と「負の数」の組で探す．

$x^2+2x-15=x^2+(-3+5)x+(-3)\cdot(5)=(x-3)(x+5)$

■　積が負の数-15となる2数は「負の数」と「正の数」の組で探す．
そのうちで，和が2となるのは「正の数」が強い方となる

(2)　$x^2-7x-18$ ○

⇒　$(x+3)(x-4)$，$(x+4)(x-3)$，$(x+6)(x-3)$
$(x+3)(x-6)$，$(x+9)(x-2)$，$\boxed{(x+2)(x-9)}$

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は78%で，少し下がりました．
≪主な誤答≫　$(x+9)(x-2)$ を選んだ答案が11%ありました．
≪ここがポイント≫　2数の積が-18になるのは異符号の2数ですが，和が-7になるのは**負の数の方が強い**場合です
⇒-9 と2
解答は赤枠で示した選択肢

(3)　$x^2-10xy+24y^2$ ○

⇒　$(x-2)(x-8)$，$(x-2y)(x-8y)$，$(x-4)(x-6)$
$\boxed{(x-4y)(x-6y)}$，$(x-3)(x-8)$，$(x-3y)(x-8y)$

【答案の傾向】
≪正答率≫　この問題の正答率は69%まで下がりました．
≪主な誤答≫　$(x-4)(x-6)$ を選んだ答案が17%ありました．
≪ここがポイント≫　$x^2-10x+24$ は積が24，和が-10 となる2つの数が-4 と-6 だから$(x-4)(x-6)$ と因数分解できますが，$x^2-10yx+24y^2$ をx の式と見ると，積が$24y^2$，和が$-10y$ となる2数を探すことになり，$-4y$ と$-6y$ になります．したがって，$(x-4y)(x-6y)$ になります．
解答は赤枠で示した選択肢

【解説】
分数や無理数が係数になっているときでも，xの係数が和になり，定数項が積になるような2数を探せば同じようにできます．
例

$x^2+2x+\frac{3}{4}$ の因数分解

（解答）
積が $\frac{3}{4}$ で
和が 2 となる2数は
$\frac{3}{2}$ と $\frac{1}{2}$ だから
$x^2+2x+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$

$x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$ の因数分解

（解答）
積が $\sqrt{6}$ で，和が $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ となる2数は，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ だから
$x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$

【問題4】 次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1)　$x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$ ○

⇒

$(x+1)(x+\frac{1}{6})$　　$(x+1)(x+\frac{5}{6})$

$\boxed{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})}$　　$(x+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{3})$

積が $\frac{1}{6}$ で，和が $\frac{5}{6}$ となる2数は $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ だから
$x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$
解答は赤枠で示した選択肢

(3)　$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}$ ○

⇒

$(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3})$　　$\boxed{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})}$

$(x+\frac{2}{9})(x-1)$　　$(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{9})$

積が $-\frac{2}{9}$ で和が $-\frac{1}{3}$ となる2数は $-\frac{2}{3}$ と $\frac{1}{3}$ だから
$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}=(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{3})$
解答は赤枠で示した選択肢

(4)　$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$ ○

⇒

$\boxed{(x-\sqrt{2})(x-1)}$　　$(x+\sqrt{2})(x+1)$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$　　$(x-\sqrt{2})(x+1)$

積が $\sqrt{2}$ で和が $-\sqrt{2}-1$ となる2数は $-\sqrt{2}$ と -1 だから
$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=(x-\sqrt{2})(x-1)$
解答は赤枠で示した選択肢

(5)　$x^2+\sqrt{2}x-4$ ○

⇒

$(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$　　$\boxed{(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}$

$(x+\sqrt{2}-1)(x-\sqrt{2}-3)$　　$(x-\sqrt{2})(x+4\sqrt{2})$

積が -4 で和が $\sqrt{2}$ となる2数は $-\sqrt{2}$ と $2\sqrt{2}$ だから
$x^2+\sqrt{2}x-4=(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$
解答は赤枠で示した選択肢

(6)　$x^2+4\sqrt{3}x+9$ ○

(2) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ○

⇒

$(x+\frac{3}{4})(x+\frac{1}{4})$　　$(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$

$(x+\frac{1}{2})(x-1)$　　$\boxed{(x-\frac{1}{2})(x+1)}$

積が $-\frac{1}{2}$ で和が $\frac{1}{2}$ となる2数は $-\frac{1}{2}$ と 1 だから

$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=(x-\frac{1}{2})(x+1)$

解答は赤枠で示した選択肢

⇒

$(x+4)(x+\sqrt{3})$　　$(x+2\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$(x+4\sqrt{4})(x+1)$　　$\boxed{(x+\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})}$

積が 9 で和が $4\sqrt{3}$ となる2数は $\sqrt{3}$ と $3\sqrt{3}$ だから

$x^2+4\sqrt{3}x+9=(x+\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})$

解答は赤枠で示した選択肢

[VI]　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

■この因数分解は「たすき掛け因数」と呼ばれるが，公式を暗記しても問題は解けない．次の例のように，2つずつ組み合わせて「中央の項」が一致するまで「いろいろ試してみる」しかない．

[VI]の例

$2x^2+5x+3$

x^2 の係数として，掛けて 2 になる組は 1 と 2 だから

$(1x+...)(2x+...)$ の形になる．

定数項の部分は，掛けて 3 になる組は 1 と 3 だから

$(...+1)(...+3)$ の形になる．

それらの組合せは，

$(1x+3)(2x+1)$ …(ア) と

$(1x+1)(2x+3)$ …(イ)

(ア)は，

$\cdots x^2+(1\cdot 1+3\cdot 2)x+\cdots=\cdots x^2+7x+\cdots$ になり，合わない

(イ)は，

$\cdots x^2+(1\cdot 3+1\cdot 2)x+\cdots=\cdots x^2+5x+\cdots$ になり，合う

(イ)より，$(x+1)(2x+3)$ …(答)

■上の(ア)(イ)において x^2 の係数と定数項は，「初めから合う組合せだけ」を使っているから，書かなくても合う．そこで「1次の係数」だけに集中してこれを合わせるようにする．

■これらのかけ算を縦書きで書くと次のようになる．ただし，2次，定数項，1次の順に書く．

$$\begin{array}{rrcr} & 1x & 3 & \rightarrow 6x \\ \times) & 2x & 1 & \rightarrow 1x \\ \hline & 2x^2 & +3+ & \boxed{7x} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & 1x & 1 & \rightarrow 2x \\ \times) & 2x & 3 & \rightarrow 3x \\ \hline & 2x^2 & +3+ & \boxed{5x} \end{array}$$

これらは合うもの
だけを使うから
調べる必要がない

■実際の計算は次のように書くので，「たすき掛け」因数分解と呼ぶ

$$\begin{array}{ccl} 1 & 3 & \rightarrow 6 \\ 2 & 1 & \rightarrow 1 \\ \hline & & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} 1 & 1 & \rightarrow 2 \\ 2 & 3 & \rightarrow 3 \\ \hline & & 5 \end{array}$$

■このように，考えられる組合わせを順に検討していき「1次の係数」が合ったとき「答」にする．

■これらの計算はすべて「1次の係数」が合うか合わないかを調べるためのものである．

問題4　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

※　途中計算は各自で左図のように行うこと．

(1) $5x^2+7x-6$ ○

⇒ $(5x+3)(x-2)$，$\boxed{(5x-3)(x+2)}$

$(5x+2)(x-3)$，$(5x-2)(x+3)$

【答案の傾向】

≪正答率≫　この問題の正答率は69%で低いままです．

≪主な誤答≫　$(5x+3)(x-2)$ を選んだ答案が15%ありました．

≪ここがポイント≫　$5x^2+7x-6$ の先頭5と末尾-24を各々積に分ける方法はいろいろあります：先頭は1×5，末尾は

$1\times(-24), 2\times(-12),...,24\times(-1)$

これらの組合せの内でxの係数がちょうど7に合うものを探します．（失敗はあります．因数分解は当て物，運です．数を打たなければ当たりません．⇒数打てば当たります．）

解答は赤枠で示した選択肢

(2) $6x^2-13x-5$ ○

⇒ $(2x-1)(3x+5)$，$(2x+1)(3x-5)$

$(2x+5)(3x-1)$，$\boxed{(2x-5)(3x+1)}$

【答案の傾向】

≪正答率≫　この問題の正答率は68%で低いままです．

≪主な誤答≫　$(2x+5)(3x-1)$ を選んだ答案が11%ありました．

≪ここがポイント≫　$6x^2-13x-5$ の先頭6と末尾-5を各々積に分ける方法はいろいろあります：先頭は$1\times 6, 2\times 3$（逆にしたものや両方とも符号を変えたものは調べなくてもよい），末尾は

$1\times(-5), (-1)\times 5$

これらの組合せの内でxの係数がちょうど-13に合うものを探します．（失敗はあります．因数分解は当て物，運です．数を打たなければ当たりません．⇒数打てば当たります．）

解答は赤枠で示した選択肢

(3) $6x^2+5x-6$ ○

⇒ $\boxed{(3x-2)(2x+3)}$，$(3x+2)(2x-3)$

$(6x+1)(x-6)$，$(6x-1)(x+6)$

【答案の傾向】

≪正答率≫　この問題の正答率は77%で，よくなりました．

≪主な誤答≫　誤答はバラバラに分かれています．

≪ここがポイント≫　$6x^2+5x-6$ の先頭6と末尾-6を各々積に分ける方法はいろいろあります：先頭は$1\times 6, 2\times 3$（逆にしたものや両方とも符号を変えたものは調べなくてもよい），末尾は

$1\times(-6), 2\times(-3),...$

これらの組合せの内でxの係数がちょうど5に合うものを探します.（失敗はあります．因数分解は当て物，運です．いろいろ試してみないと当たりません．⇒いろいろ試せばそのうち当たります．）

解答は赤枠で示した選択肢