== 2次式の因数分解 ==

※ [1]～[IV]の公式は中学校の復習となっているが，高校では「置き換え」による因数分解などやや高度なものも含まれている.

共通因数でくくる

[I]　$ma+mb=m(a+b)$

[I]の例

$$5x^2y+20xy^2\overset{(1)}{=}5(x^2y+4xy^2)\overset{(2)}{=}5xy(x+4y)$$

注意
　途中経過として(1)のような式を書くのは自由である(解答者が思いついた順序によっては xy(5x+20y) など他の形となる場合もあり得る)が，最終形は(2)の形にしなければならない.
　つまり，共通因数は全部くくり出さなければならず，最終形にまだ共通因数が残っているような形では正解とならない.

$a+b$ のような「式が共通因数」となることもある.

$$(a+b)x^2-(a+b)x=(a+b)(x^2-x)=(a+b)x(x-1)$$

$b-a=-(a-b)$ だから，次の式は共通因数でくくれる.

$$(a-b)x+(b-a)y=(a-b)x-(a-b)y=(a-b)(x-y)$$

一般に，引き算の順序が逆になっているものは「同じ因数で符号だけが逆」になる.　$y-x=-(x-y)$ など

※共通因数でくくる変形は「公式を用いる因数分解よりも先に行う」方がよい.

例

そのままの形では○^{2}−□^{2}の形に見えないが，共通因数でくくると分かるもの

$$2x^3-50x=2x(x^2-25)=2x(x+5)(x-5)$$

問題1　次の式を因数分解せよ.　（正しいものを選べ.）

(1)　$3x^2-x$

⇒　$2x$，$2x^2$，$x(3x-1)$，$3x(x-1)$

(2)　$6ax^2-3axy$

⇒　$3(2ax^2-axy)$，$x(6ax-3ay)$
$3a(2x^2-xy)$，$3ax(2x-y)$，$6ax(x-y)$

(3)　$(a+2b)x-(a+2b)y$

⇒　$(a+2b)(x+y)$，$(a+2b)(x-y)$
$(a-2b)(x+y)$，$(a-2b)(x-y)$

(4)　$a(x-y)+y-x$

⇒　$(x-y)(a+1)$，$(x-y)(a-1)$
$(y-x)(a+1)$，$(y-x)(a-1)$

[II]　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
[III]　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
[IV]　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

[II]の例

$$9x^2+6x+1=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot1+1^2=(3x+1)^2$$

■　両端の式 $3x$，1 を先に見ること. 最後に中央の項がそれ

問題2　次の式を因数分解せよ.　（正しいものを選べ.）

(1)　$x^2+8x+16$

⇒　$(x+4)^2$，$(x+12)^2$，$(x+18)^2$，2乗にならない

らの積の 2 倍になっていれば（ ）の2乗としてよい．
■ 前から順に見ていくと失敗することが多い．

[III]の例

$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2$

■ 次のような式は，中央の項が両端として考える1次式の積の 2 倍になっていないので（ ）の2乗とはならないので注意すること．

$$4x^2-6xy+9y^2$$
$$x^2+x+1$$

[IV]の例

$4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$

$3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$

■公式を考える前に共通因数でくくっておく．

(2) $9x^2-24xy+16y^2$
⇒ $9(x+4y)^2$，$9(x-4y)^2$，2乗にならない
$(3x+4y)^2$，$(3x-4y)^2$，$(3x-8y)^2$

(3) $x^2-2xy+4y^2$
⇒ $(x-2)^2$，$(x-2y)^2$
$(x-4)^2$，$(x-4y)^2$，2乗にならない

(4) $5x^3-45x$
⇒ $3x(x+5)(x-5)$，$3x(x+9)(x-9)$
$5x(x+2)(x-2)$，$5x(x+3)(x-3)$
$5x(x+9)(x-9)$，因数分解できない

[V]　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

[V]の例

$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\cdot3=(x+2)(x+3)$

■ このような問題では，
「最初に」2数の積が 6 になる組を考えること．
1と6の組，2と3の組　が考えられる．
「次に」それらのうちで2数の和が 5 になる組を採用する．
1と6の組 → 1+6=7 ×　，2と3の組 → 2+3=5　○
こうして，$(x+2)(x+3)$ を答えにする．
※「最初に」2数の和が5になる組を考えると，いくらでもあるから絞りきれない．

$x^2-7x+12=x^2+(-4-3)x+(-3)\cdot(-4)=(x-3)(x-4)$

■ 積が正の数12で，和が負の数−7となる2数は「負の

問題3　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

(1) $x^2+14x+24$
⇒ $(x+3)(x+8)$，$(x+4)(x+6)$
$(x+2)(x+12)$，$(x+2)(x+7)$

数」と「負の数」の組で探す.

$x^2+2x-15=x^2+(-3+5)x+(-3)\cdot(5)=(x-3)(x+5)$

■ 積が負の数−15となる2数は「負の数」と「正の数」の組で探す.
そのうちで，和が2となるのは「正の数」が強い方となる

(2) $x^2-7x-18$
⇒ $(x+3)(x-4)$，$(x+4)(x-3)$，$(x+6)(x-3)$
$(x+3)(x-6)$，$(x+9)(x-2)$，$(x+2)(x-9)$

(3) $x^2-10xy+24y^2$
⇒ $(x-2)(x-8)$，$(x-2y)(x-8y)$，$(x-4)(x-6)$
$(x-4y)(x-6y)$，$(x-3)(x-8)$，$(x-3y)(x-8y)$

.

【解説】
分数や無理数が係数になっているときでも，xの係数が和になり，定数項が積になるような2数を探せば同じようにできます.
例

$x^2+2x+\frac{3}{4}$ の因数分解

（解答）
積が $\frac{3}{4}$ で
和が 2 となる2数は
$\frac{3}{2}$ と $\frac{1}{2}$ だから
$x^2+2x+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$

$x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}$ の因数分解

（解答）
積が $\sqrt{6}$ で，和が $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ となる2数は，$\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ だから
$x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$

【問題4】 次の式を因数分解せよ. （正しいものを選べ. ）

(1) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$
⇒
$(x+1)(x+\frac{1}{6})$　　$(x+1)(x+\frac{5}{6})$
$(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})$　　$(x+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{3})$

(3) $x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}$
⇒
$(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3})$　　$(x+\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})$
$(x+\frac{2}{9})(x-1)$　　$(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{9})$

(4) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$
⇒
$(x-\sqrt{2})(x-1)$　　$(x+\sqrt{2})(x+1)$
$(x+\sqrt{2})(x-1)$　　$(x-\sqrt{2})(x+1)$

(5) $x^2+\sqrt{2}x-4$
⇒
$(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$　　$(x-\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$
$(x+\sqrt{2}-1)(x-\sqrt{2}-3)$　　$(x-\sqrt{2})(x+4\sqrt{2})$

(6) $x^2+4\sqrt{3}x+9$

(2) $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

⇒

$(x+\frac{3}{4})(x+\frac{1}{4})$　　$(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$

$(x+\frac{1}{2})(x-1)$　　$(x-\frac{1}{2})(x+1)$

⇒

$(x+4)(x+\sqrt{3})$　　$(x+2\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$(x+4\sqrt{4})(x+1)$　　$(x+\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})$

[VI]　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

■この因数分解は「たすき掛け因数」と呼ばれるが，公式を暗記しても問題は解けない．次の例のように，2つずつ組み合わせて「中央の項」が一致するまで「いろいろ試してみる」しかない．

[VI]の例

$2x^2+5x+3$

x^2 の係数として，掛けて 2 になる組は 1 と 2 だから

$(1x+...)(2x+...)$ の形になる．

定数項の部分は，掛けて 3 になる組は 1 と 3 だから

$(...+1)(...+3)$ の形になる．

それらの組合せは，

$(1x+3)(2x+1)$ …（ア）と

$(1x+1)(2x+3)$ …（イ）

（ア）は，

$\cdots x^2+(1\cdot 1+3\cdot 2)x+\cdots=\cdots x^2+7x+\cdots$ になり，合わない

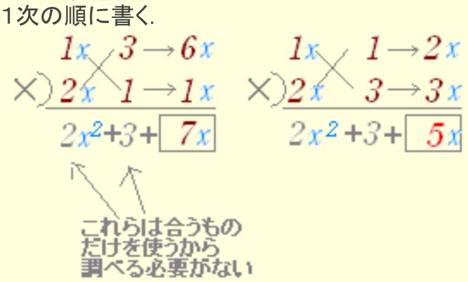
（イ）は，

$\cdots x^2+(1\cdot 3+1\cdot 2)x+\cdots=\cdots x^2+5x+\cdots$ になり，合う

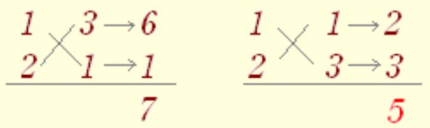
（イ）より，$(x+1)(2x+3)$ …（答）

■上の（ア）（イ）において x^2 の係数と定数項は，「初めから合う組合せだけ」を使っているから，書かなくても合う．そこで「1次の係数」だけに集中してこれを合わせるようにする．

■これらのかけ算を縦書きで書くと次のようになる．ただし，2次，定数項，1次の順に書く．



■実際の計算は次のように書くので，「たすき掛け」因数分解と呼ぶ



■このように，考えられる組合わせを順に検討していき「1次の係数」が合ったとき「答」にする．

■これらの計算はすべて「1次の係数」が合うか合わないかを調べるためのものである．

問題4　次の式を因数分解せよ．（正しいものを選べ．）

※　途中計算は各自で左図のように行うこと．

(1) $5x^2+7x-6$

⇒ $(5x+3)(x-2)$，$(5x-3)(x+2)$

$(5x+2)(x-3)$，$(5x-2)(x+3)$

(2) $6x^2-13x-5$

⇒ $(2x-1)(3x+5)$，$(2x+1)(3x-5)$

$(2x+5)(3x-1)$，$(2x-5)(3x+1)$

(3) $6x^2+5x-6$

⇒ $(3x-2)(2x+3)$，$(3x+2)(2x-3)$

$(6x+1)(x-6)$，$(6x-1)(x+6)$