== 分母の有理化 ==

■解説

○ 分母に根号を含む式を，分母に根号が含まれない形に変形することを分母の有理化という．

■有理化の長所1

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.41421356\cdots}$$

では，どこまでいっても計算が始まらないが，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.41421356\cdots}{2}$$

の形ならば，前から順に必要なだけ求められる．

■有理化の長所2

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\quad\left(\frac{1}{x}+3x\text{ の形}\right)$$

では，簡単になるかどうか分からないが，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\quad\left(\frac{x}{2}+3x\text{ の形}\right)$$

ならば，簡単になる．

○ 右の I の形の式は，赤で示した部分を分母と分子の両方に掛けると根号が2乗になって分母が有理化できる．単純に分母と同じものを掛けてもできるが，(2)の例のように分母の全体を掛けなくても，分母のうちで根号になっている部分だけ掛ければよい．(2)の例で分母分子に$2\sqrt{3}$ を掛けても間違いではないが，この場合はできた分数を2で約分することになり，遠回りになる．

なお，元の式で分子に何があるかは変形方法に関係がなく，正しく変形していくだけでよい．

○ 右の II の形の式では，分母と同じものを掛けても分母から根号は消えない．

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{15}+3=8+2\sqrt{15}$$
$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=5-2\sqrt{15}+3=8-2\sqrt{15}$$

そこで，

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

の形に合うように，「分母に和があれば，差を掛け」「分母に差があれば，和を掛ける」と根号を取り除くことができる．

II の(1)では分母が和の形：$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ になっているから，差：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ を分母分子に掛けたものである．

II の(2)では分母が差の形：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ になっているから，和：$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ を分母分子に掛けたものである．

○ 右の ＊ の形の式では，分母を2乗しても有理数とはならないから，このような式では分母の有理化はできない．

○ 右の III の形の式は，3乗の形にすれば根号が外れるので，計算はやや難しくなるが発展学習として有理化できる．

IIIの(2)では

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

の公式が使えるように変形する．

I （分母が単項式のもの）

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(2) $\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

II （分母が和または差のもの）

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

(2) $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$

＊ （有理化できないもの）

$\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{e}$

（π は円周率 3.1415...）

（e は自然対数の底[ネイピアの数] 2.71828...）

III （3乗根は発展学習）

(1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

【要約：無理数の分母の有理化】

I

単項式では，分母の根号部分を分母分子に掛ける．

II

分母が和になっていれば差を，差になっていれば和を分母分子に掛ける．

＊ III

有理化できるのは，根号の場合で、π のように根号でない無理数は有理化できない．

分母に3乗根などがあるときは，3乗して根号を消す変形を考える．

■解説

○ 分母に根号を含む式を，分母に根号が含まれない形に変形することを分母の有理化という．

■有理化の長所1

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.41421356...}$$

では，どこまでいっても計算が始まらないが，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.41421356...}{2}$$

の形ならば，前から順に必要なだけ求められる．

■有理化の長所2

○ 次の I の形の式は，赤で示した部分を分母と分子の両方に掛けると根号が2乗になって分母が有理化できる．単純に分母と同じものを掛けてもできるが，(2)の例のように分母の全体を掛けなくても，分母のうちで根号になっている部分だけ掛ければよい．(2)の例で分母分子に$2\sqrt{3}$ を掛けても間違いではないが，この場合はできた分数を2で約分することになり，遠回りになる．

なお，元の式で分子に何があるかは変形方法に関係がなく，正しく変形していくだけでよい．

I （分母が単項式のもの）

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2} \quad \left(\frac{1}{x}+3x \text{ の形}\right)$$

では，簡単になるかどうか分からないが，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2} \quad \left(\frac{x}{2}+3x \text{ の形}\right)$$

ならば，簡単になる．

(2)

$$=\frac{5\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

【問題1】 分母を有理化してください．（選択肢の中から正しいものを1つクリック）

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{1}{3}$　$\frac{\sqrt{3}}{3}$　3　$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

→閉じる←

(2)

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{2}}{5}$　$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　$\frac{\sqrt{10}}{5}$　$\frac{2}{\sqrt{10}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5} \quad \cdots(\text{答})$$

→閉じる←

(3)

$$\frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{5}}{3}$　$\frac{\sqrt{5}}{6}$　$\sqrt{5}$　$\sqrt{10}$

$$\frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10} \quad \cdots(\text{答})$$

→閉じる←

(4)

$$\frac{2}{\sqrt{6}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{\sqrt{6}}{2}$　$\frac{\sqrt{6}}{3}$　$\frac{\sqrt{2}}{6}$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

→閉じる←

(5)

$$\frac{1}{\sqrt{18}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{2}}{3}$　$\frac{\sqrt{2}}{6}$　$\frac{\sqrt{3}}{6}$　$\frac{\sqrt{18}}{18}$

$$\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6} \quad \cdots(\text{答})$$

→閉じる←

○ 次の II の形の式では，分母と同じものを掛けても分母から根号は消えない．

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=8+2\sqrt{15}$$
$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2=8-2\sqrt{15}$$

そこで，

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

の形に合うように，「分母に和があれば，差を掛け」「分母に差があれば，和を掛ける」と根号を取り除くことができる．

II の(1)では分母が和の形：$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ になっているから，差：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ を分母分子に掛けたものである．

II の(2)では分母が差の形：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$ になっているから，和：$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ を分母分子に掛けたものである．

II （分母が和または差のもの）

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(1)\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(7)\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$$

【問題2】 分母を有理化してください.（選択肢の中から正しいものを1つクリック）

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$$ …（答）

→閉じる←

(2)

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{3}$ $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{3}$ $\frac{\sqrt{10}-2}{3}$ $\frac{\sqrt{10}}{5-\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{10}-2}{3}$$ …（答）

→閉じる←

(3)

$$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

○ 解説 やり直す

$-2\sqrt{3}+3$ $-2\sqrt{3}-3$ $2\sqrt{3}-3$ $2\sqrt{3}+3$

$$\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2\sqrt{3}+3$$ …（答）

→閉じる←

(4)

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

○ 解説 やり直す

$5+2\sqrt{6}$ $5-2\sqrt{6}$ $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ $\frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$$ …

（答） →閉じる←

(5)

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{4+\sqrt{15}}{8}$ $\frac{4-\sqrt{15}}{8}$ $4+\sqrt{15}$ $4-\sqrt{15}$

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$ …

（答） →閉じる←

(6)

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

○ 解説 やり直す

$-7-4\sqrt{3}$ $-7+4\sqrt{3}$ $7-4\sqrt{3}$ $7+4\sqrt{3}$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=7-4\sqrt{3}$$ …

（答） →閉じる←

(7)

$$\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}$$

○ 解説 やり直す

$\frac{11-4\sqrt{7}}{5}$ $\frac{11;4\sqrt{7}}{5}$ $\frac{11-4\sqrt{7}}{3}$ $\frac{11+4\sqrt{7}}{3}$

$$\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}=\frac{(\sqrt{7}+2)^2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\frac{7+4\sqrt{7}+4}{7-4}=\frac{11+4\sqrt{7}}{3}$$ …

（答） →閉じる←

○ 次の＊の形の式では，分母は無理数ではあるが根号ではないので，分母を2乗しても有理数とはならない．このような式では分母の有理化はできない．

＊（有理化できないもの）

【要約：無理数の分母の有理化】
I

$\frac{1}{\pi}$　$\frac{1}{e}$

（π は円周率 $3.1415...$）

（e は自然対数の底[ネイピアの数] $2.71828...$）

○　次の III の形の式は，3乗の形にすれば根号が外れるので，計算はやや難しくなるが発展学習として有理化できる．

III （3乗根は発展学習）

(1)　$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，　$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

IIIの(2)では

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

の公式が使えるように変形する．

単項式では，分母の根号部分を分母分子に掛ける．

II

分母が和になっていれば差を，差になっていれば和を分母分子に掛ける．

＊ III

有理化できるのは，根号の場合で、π のように根号でない無理数は有理化できない．

分母に3乗根などがあるときは，3乗して根号を消す変形を考える．