== 放物線と三角形の面積 ==

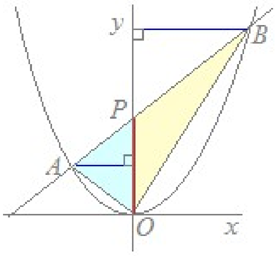
【例題1】
　放物線$y=x^2$と直線$y=x+2$の交点をA, Bとすると き，$\triangle AOB$の面積を求めてください

（解答）
　はじめに，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=x+2 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点A, Bの座標を求めます．

(1)を(2)に代入すると
$x^2=x+2$
$x^2-x-2=0$
$(x-2)(x+1)=0$
$x=2, -1$
$A(-1, 1), B(2, 4)$



　次に，直線$y=x+2$ …(2)
とy軸との交点（切片）をPとしてPの座標を求めると，$P(0, 2)$

　右図のように$\triangle AOB$をy軸で2つに分けて，$\triangle AOP$と$\triangle BOP$とする．

　各々の三角形の底辺を$OP=2$と考えると高さはA, Bのx座標（の絶対値=符号を正にしたもの）だから，
$\triangle AOP$の高さは1
$\triangle BOP$の高さは2
三角形の面積は（底辺）×（高さ）÷2で求められるから
$\triangle AOP$の面積は
$\frac{2\times 1}{2}=1$
$\triangle BOP$の面積は
$\frac{2\times 2}{2}=2$
よって
$\triangle AOB$の面積は3…（答）

【要点】
　三角形をy軸で2つに分けると

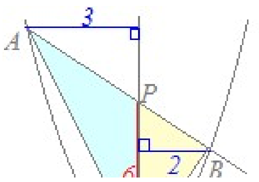
- 切片の長さが底辺になる
- A, Bのx座標（の符号を正にしたもの）が高さになる

※なお，この方法がただ1つの正しい方法だということではない．解き方は幾つもあるが，この方法なら簡単に解けるということである

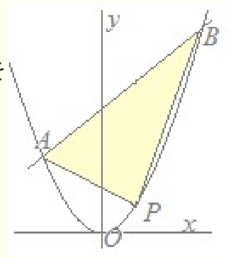
【問題1】…正しい選択肢をクリックしてください
　放物線$y=x^2$と直線$y=-x+6$の交点$A(-3, 9), B(2, 4)$と原点$O(0, 0)$とでできる$\triangle AOB$の面積を求めてください．
○ 解説

9　**12**　**15**　**20**　**25**　**30**

$\triangle AOB$をABとy軸との交点$P(0, 6)$を使って，$\triangle AOP$と$\triangle BOP$に分ける．
OPを底辺と考えると，各々の三角



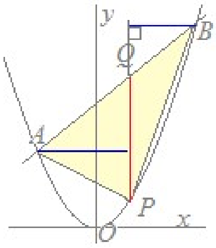
【例題2】
　放物線$y=x^2$と直線$y=x+6$の交点をA, Bとし，放物線$y=x^2$上の1点を$P(1, 1)$とするとき，$\triangle APB$の面積を求めてください



（解答）
連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=x+6 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点A, Bの座標を求める．
(1)を(2)に代入すると
$x^2=x+6$
$x^2-x-6=0$
$(x-3)(x+2)=0$
$x=3, -2$
$A(-2, 4), B(3, 9)$



　次に，$P(1, 1)$からy軸に平行な直線をひき，ABとの交点をQとすると

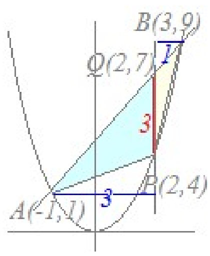
$$\begin{cases} x=1 & \cdots(3) \\ y=x+6 & \cdots(4) \end{cases}$$

より，$Q(1, 7)$

$\triangle APB$を$\triangle APQ$と$\triangle BPQ$に分けると
$PQ=7-1=6$
PQを底辺とすると，$\triangle APQ$の高さは
$1-(-2)=3$
$\triangle BPQ$の高さは
$3-1=2$
$\triangle APQ$, $\triangle BPQ$の面積は各々
$\frac{6\times 3}{2}=9$，$\frac{6\times 2}{2}=6$
だから，$\triangle AOB$の面積は$9+6=15$…（答）

【問題3】
　放物線$y=x^2$と直線$y=2x+3$の交点をA, Bとし，放物線$y=x^2$上の1点を$P(2, 4)$とするとき，$\triangle APB$の面積を求めてください．
○ 解説

3　**4**　**6**　**8**　**9**　**12**



連立方程式

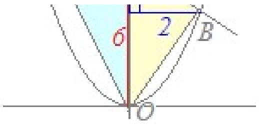
$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=2x+3 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点A, Bの座標を求める．
(1)を(2)に代入すると
$x^2=2x+3$
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$x=3, -1$
$A(-1, 1), B(3, 9)$
　Pを通りy軸に平行な直線$x=2$と直線$y=2x+3$との交点をQとすると，Qの座標は次の連立方程式で求められる．

$$\begin{cases} x=2 & \cdots(3) \\ y=2x+3 & \cdots(4) \end{cases}$$

より，$Q(2, 7)$
$\triangle APB$を$\triangle APQ$と$\triangle BPQ$に分ける．
PQの長さは$7-7=3$に等しい．

形の底辺の長さは $OP=6$
高さは A, B の x 座標（の符号を正にしたもの）だから，各々 3 と 2 になる．



面積は各々

$$\frac{6\times3}{2}=9$$
$$\frac{6\times2}{2}=6$$

だから，$\triangle AOB$ の面積は 15 …（答）

【問題2】

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の2交点 A, B と原点 $O(0,\ 0)$ とでできる $\triangle AOB$ の面積を求めてください．

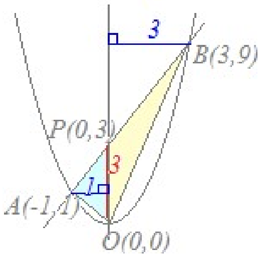
〇 解説

3　4　6　8　9　12

連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=2x+3 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点 A, B の座標を求める．



(1)を(2)に代入すると

$x^2=2x+3$
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$x=3,\ -1$
$A(-1,\ 1),\ B(3,\ 9)$

$\triangle AOB$ を AB と y 軸との交点 P を使って，$\triangle AOP$ と $\triangle BOP$ に分ける．

OP の長さは直線 $y=2x+3$ の切片 3 に等しい．

高さは A, B の x 座標（の符号を正にしたもの）だから，各々 1 と 3 になる．

面積は各々

$$\frac{3\times1}{2},\quad \frac{3\times3}{2}$$

だから，$\triangle AOB$ の面積は $\dfrac{3\times1}{2}+\dfrac{3\times3}{2}=6$ …（答）

$\triangle APQ$ の高さは $2-(-1)=3$，$\triangle BPQ$ の高さは $3-2=1$ になる．

面積は各々

$$\frac{3\times3}{2},\quad \frac{3\times1}{2}$$

だから，$\triangle AOB$ の面積は $\dfrac{3\times3}{2}+\dfrac{3\times1}{2}=6$ …（答）

【問題4】

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x+4$ の交点を A, B とし，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の1点を $P(-6,\ 18)$ とするとき，$\triangle APB$ の面積を求めてください．

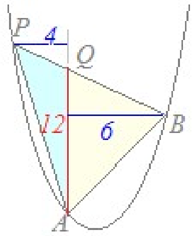
〇 解説

12　18　24　30　48　60

連立方程式

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 & \cdots(1) \\ y=x+4 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点 A, B の座標を求める．



(1)を(2)に代入すると

$\frac{1}{2}x^2=x+4$
$x^2=2x+8$
$x^2-2x-8=0$
$(x-4)(x+2)=0$
$x=4,\ -2$
$A(-2,\ 2),\ B(4,\ 8)$

A を通り y 軸に平行な直線 $x=-2$ と直線 PB との交点を Q とする．

直線 PB の方程式を求める．

$y=ax+b$ とおくと
$P(-6,\ 18)$ を通るから，$18=-6a+b$ …(3)
$B(4,\ 8)$ を通るから，$8=4a+b$ …(4)
(3)(4)から $a=-1,\ b=12$
$y=-x+12$

Q の座標は次の連立方程式で求められる．

$$\begin{cases} x=-2 & \cdots(5) \\ y=-x+12 & \cdots(6) \end{cases}$$

より，$Q(-2,\ 14)$

$\triangle APB$ を $\triangle APQ$ と $\triangle ABQ$ に分ける．

PQ の長さは $14-2=12$ に等しい．

$\triangle APQ$ の高さは $-2-(-6)=4$，$\triangle ABQ$ の高さは $4-(-2)=6$ になる．

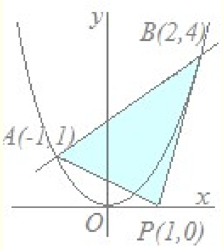
面積は各々

$$\frac{12\times4}{2}=24,\quad \frac{12\times6}{2}=36$$

だから，$\triangle AOB$ の面積は $24+36=60$ …（答）

【例題3】

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点を A, B とし，x 軸上の1点を $P(1, 0)$ とするとき，$\triangle APB$ の面積を求めてください



（解答）

連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=x+2 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点 A, B の座標を求める．

(1)を(2)に代入すると

$x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

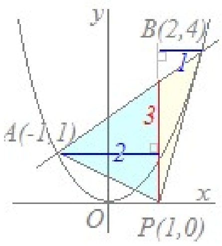
$x=2, -1$

$A(-1, 1), B(2, 4)$

次に，$P(1, 0)$ から y 軸に平行な直線をひき，AB との交点を Q とすると

$$\begin{cases} x=1 & \cdots(3) \\ y=x+2 & \cdots(4) \end{cases}$$

より，$Q(1, 3)$



$\triangle APB$ を $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ に分けると

$PQ=3$

PQ を底辺とすると，$\triangle APQ$ の高さは

$1-(-1)=2$

$\triangle BPQ$ の高さは

$1-1=1$

$\triangle APQ, \triangle BPQ$ の面積は各々

$\dfrac{3\times2}{2}$，$\dfrac{3\times1}{2}$

だから，$\triangle AOB$ の面積は $\dfrac{6}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$ …(答)

【問題5】

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-2x+3$ の交点を A, B とし，x 軸上の1点を $P(-1, 0)$ とするとき，$\triangle APB$ の面積を求めてください．

○ 解説

6　7　8　9　10　11

連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=-2x+3 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点 A, B の座標を求める．

(1)を(2)に代入すると

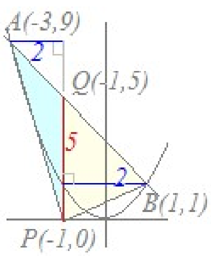
$x^2=-2x+3$

$x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1, -3$

$A(-3, 9), B(1, 1)$



P を通り y 軸に平行な直線 $x=-1$ と直線 AB との交点を Q とする．

Q の座標は次の連立方程式で求められる．

$$\begin{cases} x=-1 & \cdots(5) \\ y=-2x+3 & \cdots(6) \end{cases}$$

より，$Q(-1, 5)$

$\triangle APB$ を $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ に分ける．

【問題6】

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点を A, B とし，x 軸上の1点を $P(3, 0)$ とするとき，$\triangle APB$ の面積を求めてください．

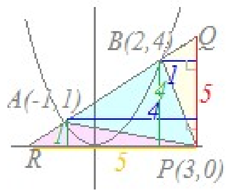
○ 解説

$\dfrac{13}{2}$　$\dfrac{15}{2}$　$\dfrac{17}{2}$　$\dfrac{19}{2}$　$\dfrac{21}{2}$　$\dfrac{23}{2}$

連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots(1) \\ y=x+2 & \cdots(2) \end{cases}$$

を解いて，2交点 A, B の座標を求める．



(1)を(2)に代入すると

$x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2, -1$

$A(-1, 1), B(2, 4)$

P を通り y 軸に平行な直線 $x=3$ と直線 AB との交点を Q とする．

Q の座標は次の連立方程式で求められる．

$$\begin{cases} x=3 & \cdots(5) \\ y=x+2 & \cdots(6) \end{cases}$$

より，$Q(3, 5)$

$\triangle APB$ を $\triangle APQ$ から $\triangle BPQ$ を引いたものと考える．

PQ の長さは 5 に等しい．

$\triangle APQ$ の高さは $3-(-1)=4$，$\triangle BPQ$ の高さは $3-2=1$ になる．

面積は各々

$\dfrac{5\times4}{2}$，$\dfrac{5\times1}{2}$

だから，$\triangle APB$ の面積は $\dfrac{20}{2}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$ …(答)

（別解）

図の桃色で示したように，$\triangle APB$ を $\triangle BRP$ から $\triangle ARP$ を引いたものと考えても簡単にできる．

R の x 座標は $y=x+2$ に $y=0$ を代入すれば得られ，$R(-2, 0)$．

底辺を $RP=3-(-2)=5$（オレンジ色）と考えると

$\triangle ARP$ の高さ（緑）は 1，$\triangle BRP$ の高さ（緑）は 4 になる．

面積は各々

$\dfrac{5\times4}{2}$，$\dfrac{5\times1}{2}$

だから，$\triangle APB$ の面積は $\dfrac{20}{2}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$ …(答)

PQ の長さは 5 に等しい.

$\triangle APQ$ の高さは $-1-(-3)=2$，$\triangle BPQ$ の高さは $1-(-1)=2$ になる.

面積は各々

$$\frac{5\times2}{2}=5,\ \frac{5\times2}{2}=5$$

だから，$\triangle APB$ の面積は $5+5=10$ …（答）